



www.cpjournals.com

## بررسی مدل هذلولی به عنوان یکی از مدل‌های رفتاری خاک‌های غیر اشباع و اصلاحات صورت گرفته روی این مدل

سمیه سیروس پور<sup>۱</sup>، منصور پرویزی<sup>۲\*</sup>، محسن زاهدآقایی<sup>۳</sup>

۱- مربی گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رامهرمز، رامهرمز، ایران

۲- استادیار گروه مهندسی عمران و ژئوتکنیک، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران

پست الکترونیکی:

[Parvizi@yu.ac.ir](mailto:Parvizi@yu.ac.ir)

۳- مربی گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد دزفول، دزفول، ایران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۸/۷/۱، تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۷/۳۰

### چکیده

در میان مدل‌های رفتاری موجود برای خاک‌های غیر اشباع، مدل‌های الاستیک غیرخطی علی‌رغم ضعف‌ها و کاستی‌هایی که دارد به دلیل سادگی و نیاز به پارامترهای محدود در کارهای عملی در سطح گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این مقاله هدف اصلی اصلاح فرمولاسیون مدل هذلولی بر اساس تحقیقات انجام شده می‌باشد؛ به طوری که معایب موجود در مدل رفع شده و مدل با نتایج تجربی انطباق بیشتری داشته باشد. یکی از مدل‌های الاستیک رایج جهت پیش‌بینی رفتار خاک‌های غیر اشباع، مدل هایپربولیک یا مدل هذلولی می‌باشد. این مدل به عنوان مدل دانکن و چانگ شناخته می‌شود. یک مدل دو پارامتری برای بدست آوردن منحنی تنش-کرنش آزمایش سه محوره است. رابطه هذلولی که بیانگر مشخصه‌های ایده‌آل از خاک است، دارای مزایایی مانند استفاده از مدل بدون نیاز به برنامه‌های آزمایشی گسترده، قابل اجرا بودن مدل برای برنامه‌های رایانه‌ای و ... می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که با وجود همه تلاش‌هایی که در زمینه رفع کاستی‌های این مدل انجام شده است این مدل قادر به پیش‌بینی رفتار پلاستیک خاک‌های نیمه اشباع نمی‌باشد. از محدودیت‌های این مدل می‌توان به مناسب نبودن روابط مدل هذلولی برای تحلیل مرحله‌ای که ناپایداری خاک وجود دارد، مفید نبودن روابط در شرایط تغییر حجم خاک و تجربی بودن ضرایب مورد استفاده در روابط و ... اشاره کرد. روابط هایپربولیک برای حل مسائل مختلفی در زمینه ژئوتکنیک و مهندسی مفید و کاربردی است؛ زیرا مقادیر عددی پارامترهای مدل هذلولی از نتایج آزمایشگاهی قابل استخراج است و همه روابطی که برای خاک‌های زهکشی شده استفاده می‌شود، قابلیت کاربرد برای خاک‌های زهکشی نشده و تحکیم نیافته را داراست؛ همچنین مقادیر متعددی از پارامترها برای انواع خاک‌ها در طول ۳۰ سال گذشته مورد آزمایش و استخراج قرار گرفته است. در نتیجه می‌توان از منبع قابل توجهی برای مقایسه و تفسیر نتایج بدست آمده در هر پروژه-ای استفاده کرد.

کلمات کلیدی: مدل هذلولی، خاک‌های غیر اشباع، مدل الاستیک غیرخطی، مدل دانکن و چانگ، مدل الاستیک

## ۱- مقدمه

در بررسی پایداری خاکریزها در حوزه مهندسی، آن طور که معمول است می‌توان پارامترهای مقاومتی هر نوع خاک را بر حسب درصد رطوبت و میزان کوبیدگی آن در آزمایشگاه تعیین و ضریب اطمینان پایداری را روی یک سطح لغزش آزمایشی در آن خاکریز محاسبه کرد. با وجود این، توجه به این نکته حایز اهمیت است که شرایط احداث خاکریزها شرایط خاصی است که وضعیت خاک نه در حالت اشباع و نه در حالت خشک باشد، بلکه واقعاً و عملاً در وضعیت شرایط غیراشباع قرار داشته باشد. از این جهت در تحلیل پایداری این خاکریزها بر اساس تئوری خاک غیراشباع، مقادیر پارامترهای درگیر در سوی دیگر است که مقادیر آنها بسیار متغیر و تابع عوامل مختلفی چون درصد اشباع، نفوذپذیری و زمان است [۱]. بررسی وضعیت غیراشباع خاکها از حدود سال‌های دهه ۱۹۶۰ آغاز شده و تاکنون تحقیقات متعددی به صورت آزمایشگاهی، محاسباتی و نظری در مورد آن انجام شده است. از نظر کاربردی نیز این تئوری‌ها و نتایج آزمایش‌های مربوط به آنها در شرایط خاص پروژه‌های اجرایی مورد تحلیل و ارزیابی قرار گرفته است. نمونه‌هایی از این تحقیقات را می‌توان در کتاب مکانیک خاک‌های غیراشباع [۲] و مقالات متعددی که در این زمینه ارائه شده‌اند، مشاهده کرد. مدل‌های رفتاری برای خاک‌های اشباع تا به امروز به صورت گسترده‌ای ارائه و توسعه یافته‌اند. اما این موضوع در مورد خاک‌های غیراشباع با توجه به پیچیدگی موضوع و کمبود نتایج تجربی توسعه کمتری یافته است. از طرفی مدل‌های رفتاری که برای خاک‌های اشباع ارائه شده‌اند قادر به پیش‌بینی درستی از رفتار خاک‌های غیراشباع نیستند. با توجه به اینکه در بسیاری از مناطق، به خصوص مناطقی مانند ایران که در ناحیه خشک یا نیمه خشک قرار دارند، سازه‌های خاکی ساخته دست بشر یا طبیعی در شرایط غیراشباع می‌باشند، ارزیابی مدل‌های رفتاری موجود مربوط به این خاک‌ها اصلاح و یا ارائه مدل‌های جدید ضروری می‌باشد.

در میان مدل‌های رفتاری موجود برای خاک‌های غیر اشباع مدل‌های الاستیک غیر خطی علی‌رغم ضعف‌ها و کاستی‌هایی که دارد به دلیل سادگی و نیاز به پارامترهای محدود در سطح گسترده‌ای در کارهای عملی مورد استفاده قرار می‌گیرد. حال آنکه برای رسیدن به پیش‌بینی‌های دقیق‌تر، استفاده از مدل‌های الاستوپلاستیک اجتناب‌ناپذیر است. اما باید توجه نمود که این مدل‌ها نیاز به پارامترهای بیشتری دارند و در مجموع پیچیده‌تر از مدل‌های قبلی می‌باشند [۳]. در سال ۱۹۹۰، آلونسو و همکاران<sup>۱</sup> اولین مدل رفتاری الاستوپلاستیک را برای خاک‌های غیراشباع با استفاده از تئوری پلاستیسیته ارائه نمودند که شکل آن یک بیضی مانند مدل کم‌کلی اصلاح شده می‌باشد. این بیضی برای هر سطح مکش بافتی متفاوت است. این مدل برای خاک‌های غیراشباع کمی تا مقداری منبسط شونده مثل ماسه، سیلت، ماسه‌های رسی و رس‌های با پلاستیسیته کم مناسب است [۴]. با این مدل مفاهیم اساسی مثل کاهش حجم الاستوپلاستیک خاک در تراکم ایزوتروپ، تغییر در سفتی و مقاومت برشی با سطح مکش و افزایش حجم الاستوپلاستیک خاک در فرایند تر شدن به راحتی توصیف می‌شود؛ اما تغییر حجم برگشت‌ناپذیر در فرایند مرطوب شدن و تغییرات برگشت‌ناپذیر درجه اشباع در فرایند تر و خشک شدن دیده نمی‌شود. سطح تسلیم ارائه شده توسط آلونسو علی‌رغم برخورداری از توانایی نسبی در بیان رفتار خاک‌های غیراشباع، متأسفانه قادر به پیش‌بینی خوبی از رفتار خاک غیراشباع در محدوده تنش‌های کم نیست و در بیان رفتار خاک‌های رسی بیش‌تحکیم‌یافته انطباق خوبی با نتایج تجربی ندارد. لذا در این مقاله هدف اصلی اصلاح فرمولاسیون مدل هذلولی بر اساس تحقیقات انجام شده می‌باشد، به طوری که معایب موجود در مدل رفع شده و مدل با نتایج تجربی انطباق بیشتری داشته باشد.

## ۲- تاریخچه مدل سازی رفتار خاک‌های غیراشباع

مدل‌های رفتاری مختلفی برای توصیف رفتار خاک‌های غیراشباع ارائه شده است که اکثریت آنها بر اساس مدل‌های حالت بحرانی کم‌کلی و کم‌کلی اصلاح شده پایه‌گذاری شده‌اند. متغیرهای اساسی در مدل عبارت از  $p$  تنش متوسط،  $q$  تنش انحرافی،  $S$  مکش

1- Alonso et al

بافتی (مقدار آن برابر  $u_a - u_w$  می‌باشد) و حجم مخصوص می‌باشند.  $u_w$  فشار آب حفره ای و  $u_a$  فشار هوای حفره‌ای هستند. مدل رفتاری کاربو<sup>۲</sup> برای خاک‌های غیراشباع به صورت ساده ذیل در سال ۱۹۸۸ ارائه شده است [۵].

$$q = M.f[(p - u_a), (u_a - u_w)] \quad (۱)$$

$$M = M' \left( \frac{1}{\alpha} \right) + \left( \frac{-\Delta V}{\Delta \varepsilon} \right)_f, \quad \frac{1}{\alpha} = \left[ 1 + \frac{f(s)}{P} \right] \quad (۲)$$

در رابطه فوق، همان نشانه اتساع می‌باشد. در سال ۱۹۷۸ مدل رفتاری فردلاند<sup>۳</sup> و همکاران<sup>۳</sup> به صورت ذیل ارائه شد [۶].

$$q = M.f[(p - u_a), (u_a - u_w)] \quad (۳)$$

در رابطه فوق  $M$  مشخصه مصالح وابسته به تنش و ثابت خاک است. جومی<sup>۴</sup> در سال ۲۰۰۰ معادله فردلاند را به صورت ذیل ارتقا داد [۷].

$$q = M. \left[ (p - u_a) + S.(u_a - u_w) \right] \quad (۴)$$

تول<sup>۵</sup> در سال ۱۹۹۰، رفتار برشی خاک‌های غیر اشباع را بر پایه تنش‌های کل و مکش بافتی وارد بر خاک بیان نمود. مدل او بر اساس مکانیک خاک حالت بحرانی محیط‌های اشباع قرار دارد که پارامترهای موثر بر رفتار غیر اشباع به آن اضافه شده است. او پیشنهاد داد که در درجه اشباع کم، مکش روی مقاومت خاک اثری ندارد. رفتار تنش در حالت بحرانی در مدل تول به صورت ذیل است [۸].

$$q = M_a (p - u_a) + M_b (u_a - u_w) \quad (۵)$$

$M_a$  و  $M_b$  پارامترهای نسبت تنش کل و تابع مکش می‌باشند و به درجه اشباع خاک بسیار وابسته هستند.  $M_a$  با کاهش درجه اشباع، به طور صعودی بالا می‌رود و  $M_b$  با کاهش درجه اشباع، روند نزولی دارد. ولر و سیواکومار<sup>۶</sup> در سال ۱۹۹۵ روی مدل تول توصیه‌ای به صورت ذیل ارائه نمود [۹].

$$q = f[(p - u_a), (u_a - u_w)] \quad (۶)$$

$$q = M(p - u_a) + f(u_a - u_w) \quad (۷)$$

در رابطه فوق  $M$  نسبت حالت بحرانی خاک در حالت اشباع کامل است. در خاک اشباع  $M_a = M_b = M_s$  می‌باشد و رابطه تول به شکل زیر ساده می‌شود:

$$q_f = M_s (p - u_a) \quad (۸)$$

<sup>۲</sup> Karube

<sup>۳</sup> Fredlund et al

<sup>۴</sup> Jommi

<sup>۵</sup> Toll

<sup>۶</sup> Wheeler and Sivakumar

جهت یافتن معادله تابع  $f(u_a - u_w)$  کافی است تابع  $q - M(p - u_a)$  را در برابر  $(u_a - u_w)$  ترسیم شود. در نتیجه، پارامترهای تنش انحرافی براساس تنش کل و مکش بافتی درون خاک قابل تخمین است.

### ۳- مدل هذلولی<sup>۷</sup>

در ادبیات، مدل‌های رفتاری مختلفی جهت بیان رفتار خاک‌های غیراشباع ارائه شده است. مفاهیم حالت بحرانی ابزار مفیدی برای بیان رفتار خاک‌ها است. یکی از مدل‌های الاستوپلاستیک رایج جهت پیش‌بینی رفتار خاک‌های غیراشباع مدل هذلولی می‌باشد که اولین بار لورته و همکاران<sup>۸</sup> در سال (۱۹۸۷) و آلونسو و همکاران در سال ۱۹۸۸ [۴] برای بدست آوردن مدول برشی (G) در تحلیل رفتار خاک‌های غیراشباع از قانون تنش برشی - کرنش برشی هایپربولیک استفاده نمودند؛ که در آن اثر سخت شونده ناشی از مکش به صورت خطی و رابطه وارد شده بود. در سال ۱۹۹۲ گتمیری و همکاران<sup>۹</sup> [۱۰] مدل‌سازی رفتاری خاک‌های غیراشباع را با فرض رفتار الاستیک غیر خطی و بهره‌گیری از سطوح حالت را ارائه نمودند. در این مدل‌سازی از قانون هایپربولیک برای بدست آوردن مدول یانگ مماسی استفاده می‌شود. سپس در سال ۱۹۹۸ [۱۱] آن‌ها مدول حجمی را با رابطه‌ای سازگار با خاک‌های غیراشباع و قانون هایپربولیک تعریف نمودند.

در رابطه زیر  $K_s$  مدول حجمی،  $a$ ،  $b$ ،  $K_b$  و  $m$  ثوابت،  $P_{atm}$  فشار اتمسفر،  $S$  مکش و  $\sigma_e$  فشار تورم می‌باشد. مدل هذلولی ارائه شده برای خاک‌های نیمه اشباع علیرغم سادگی، بدلیل الاستیک بودن قادر نیست تغییرشکل‌های ماندگار را در این خاک‌ها نشان دهد.

$$K_s = K_b P_{atm} \left( \frac{\sigma_3}{P_{atm}} \right)^m \quad (9)$$

$$K_s = \frac{K_b P_{atm}}{a - \frac{bs}{\sigma_e}} \left[ a \frac{(\sigma - P_a)}{P_{atm}} + b \left( 1 - \frac{(\sigma - P_a)}{\sigma_e} \right) \frac{S}{P_{atm}} \right]^m \quad (10)$$

همانطور که ملاحظه می‌شود اگر در رابطه (۱۰) مکش برابر صفر و  $a$  برابر ۱ باشد، تبدیل به حالت اشباع (رابطه ۹) می‌شود. در این مدل فرض بر این است که نسبت تخلخل، تابع تنش و مکش می‌باشد.

$$e = f \left( \left( \sigma - P_a \right), s \right) \quad (11)$$

$D_s$ : مبین تانسوری دوبعدی جهت در نظر گرفتن رفتار ناشی از تغییرات مکش است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$D_s = \frac{K_b P_{atm}}{b \left( 1 - \frac{(\sigma - P_a)}{\sigma_e} \right)} \left[ a \frac{(\sigma - P_a)}{P_{atm}} + b \left( 1 - \frac{(\sigma - P_a)}{\sigma_e} \right) \frac{S}{P_{atm}} \right]^m \quad (12)$$

تغییرات کرنش حجمی ناشی از تغییرات تنش کل ( $d\varepsilon_v$ ) و تغییرات کرنش برشی ناشی از تغییر مکش ( $d\varepsilon_s$ ) از روابط زیر بدست می‌آید. کرنش کل نیز از جمع دو مقدار فوق بدست می‌آید.

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{1+e} \left[ \frac{\partial e}{\partial (\sigma - P_a)} \right] = K_s^{-1} d(\sigma - P_a) \quad (13)$$

<sup>۷</sup> Hyperbolic Model

<sup>۸</sup> Lloret et al

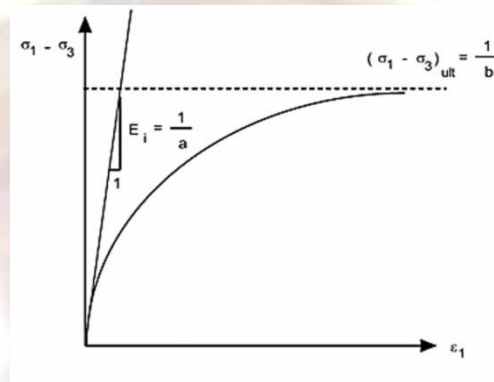
<sup>۹</sup> Gatzmiri et al

$$d\varepsilon_s = \frac{1}{1+e} \left( \frac{\partial e}{\partial S} \right) = K_s^{-1} dS \quad (14)$$

مدل هایپربولیک، یک مدل دو پارامتری برای بدست آوردن منحنی تنش- کرنش آزمایش سه محوره است. در این مدل، رفتار به صورت الاستیک غیر خطی می باشد. کندر و همکارانش منحنی تنش- کرنش را برای دو خاک رسی و ماسه ای مطابق شکل (۱) پیشنهاد دادند که این منحنی، طبق رابطه هایپربولیک (رابطه ۱۵) بدست آمده است [۱۲، ۱۳]. در این مدل:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (15)$$

در معادله (۱۵)  $\sigma_1$  و  $\sigma_3$  به ترتیب تنش های اصلی ماکزیمم و مینیمم،  $\varepsilon_1$  کرنش اصلی ماکزیمم و  $a$  و  $b$  ثابت هایی با مفهوم فیزیکی هستند که از نتایج آزمون سه محوری بر روی خاک مورد نظر و به وسیله داده های آزمایشگاهی بدست می آیند.



شکل ۱- منحنی تفاضل تنش های اصلی نسبت به کرنش محوری برای خاک

با فرض ثابت ماندن تنش اصلی کمینه  $\sigma_3$ ، مدول مماسی به شکل زیر تعریف می شود:

$$E_t = \frac{\partial(\sigma_1 - \sigma_3)}{\partial \varepsilon_1} = \frac{(a + b\varepsilon_1)(1) - b\varepsilon_1}{(a + b\varepsilon_1)^2} = \frac{a}{(a + b\varepsilon_1)^2} \quad (16)$$

طبق رابطه (۱۵):

$$\varepsilon_1 = \frac{a(\sigma_1 - \sigma_3)}{1 - b(\sigma_1 - \sigma_3)} \quad (17)$$

با جایگذاری رابطه (۱۷) در رابطه (۱۶) رابطه  $E_t$  بدست می آید:

$$E_t = \frac{1}{a} [1 - b(\sigma_1 - \sigma_3)]^2 \quad (18)$$

زمانی که  $(\sigma_1 - \sigma_3)$  برابر صفر باشد، مدول مماسی اولیه  $E_i$  (شیب منحنی تنش- کرنش) است. با ارزیابی معادله (۱۸) خواهیم

داشت:

$$E_i = \frac{1}{a} [1 - b(0)]^2, \quad a = \frac{1}{E_i} \quad (19)$$

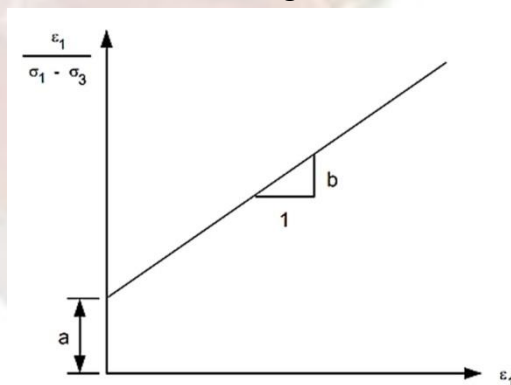
مطابق شکل (۱) اگر  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  به مقدار  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  مجانب شود، در نتیجه  $E_t$  به صفر نزدیک می شود.

در اینجا  $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$  مقدار مجانب است که از تفاضل تنش‌های اصلی در کرنش بی نهایت بدست می‌آید. با ارزیابی معادله (۱۵) برای این شرایط و با جایگزینی این عبارت برای  $a$  و  $b$  در معادله (۱۸) برای  $E_t$  به رابطه شماره ۲۰ رسیده می‌شود:

$$E_t = E_i \left[ 1 - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \right]^2 \quad (20)$$

درواقع معادله (۱۵) که تنها برحسب  $\varepsilon_1$  و تفاضل تنش‌های اصلی است، یک حالت تقارن سه محوری مواد را بیان می‌کند. از منحنی تنش-کرنش که در شکل (۱) نشان داده شده است، آشکار است که ایده‌آل‌سازی هذلولی تنها می‌تواند برای خاک‌های رسی عادی تحکیم یافته یا بیش تحکیم یافته و همچنین برای ماسه‌های سست صحیح باشد. در واقع از آنجا که این مدل الاستیک و همگن فرض شده است، ایده‌آل‌سازی هذلولی اطلاعاتی در مورد تغییرات حجم مواد ارائه نمی‌دهد.

اگر ما  $\varepsilon_1$  را به عنوان طول در نظر بگیریم و  $\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1 - \sigma_3}$  را عرض، آنگاه ایده‌آل‌سازی منحنی تنش-کرنش هذلولی طرحی مطابق خط مستقیم شکل (۲) خواهد داشت. شیب این خط  $b$  و محل تقاطع آن  $a$  است.



شکل ۲- نمودار تبدیل شده هایپربولیک تنش-کرنش

#### ۴- مدل دانکن و چانگ<sup>۱۰</sup>

با ذکر تجربیات قبلی از جانب<sup>۱۱</sup> [۱۴]، دانکن و چانگ [۱۵] اشاره کرده بودند که هر کدام از این  $a$  و  $b$  های ثابت باید به تنش مؤثر اصلی حداقل  $\sigma_3$  وابسته باشند (محدود باشند). به طور دقیق‌تر آن‌ها پیشنهاد کرده‌اند که  $E_i$  از روش زیر و طبق شکل (۳) متفاوت خواهد بود:

$$E_i = \frac{1}{a} = K_i p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (21)$$

در این معادله  $k_i$  عدد ضریب سختی در حالت بارگذاری اولیه،  $p_a$  فشار اتمسفر (۱۰۱/۳ kPa) و  $n$  عدد توان، معرف نرخ تغییرات مدول اولیه خاک با تنش اصلی کمینه هستند که از نتایج مجموعه آزمایش‌های سه محوری به دست می‌آیند.

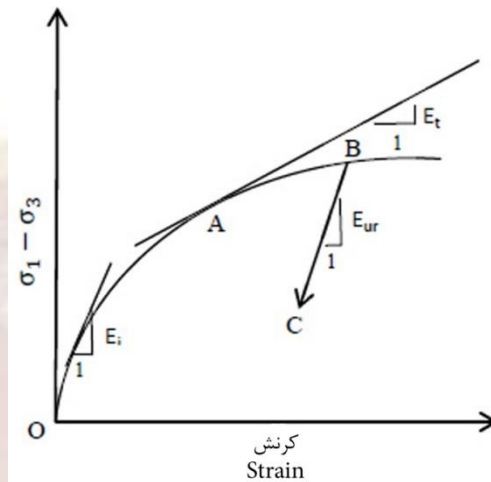
همچنین مدول مماسی  $E_t$  طبق رابطه زیر به دست می‌آید. در رابطه (۲۲) که توسط دانکن و چانگ ارائه شده است، مقدار مدول مماسی در حالت بارگذاری اولیه به شکل تابعی غیر خطی از فشار جانبی خاک بیان می‌گردد.

<sup>۱۰</sup> Duncan-chang

<sup>۱۱</sup> Janbu

$$E_t = \left[ 1 - \frac{R_f (\sigma - \sigma_3)(1 - \sin \phi)}{2c(\cos \phi) + 2\sigma_3 \sin \phi} \right]^2 E_i \quad (22)$$

در معادله (۲۲)،  $E_i$  مدول مماسی اولیه،  $E_t$  مدول مماسی،  $\phi$  زاویه اصطکاک داخلی خاک،  $c$  چسبندگی خاک و  $R_f$  نسبت بین خط مجانب منحنی هایپربولیک و ماکزیمم مقاومت برشی (نسبت استحکام محاسبه شده در تغییر شکل بینهایت) می باشد که مقدار آن عددی بین ۰/۷۵ تا ۱ می باشد.



شکل ۳- نمودار تنش- کرنش مدل هایپربولیک دانکن و چانگ

همان گونه که پیش تر بیان شد، مدل هذلولی دانکن و چانگ جزء مدل های رفتاری کشسان محسوب می شود و رفتار غیرخطی خاک را با این فرض تحلیل می نماید. با این وجود، دانکن و چانگ با ارائه رابطه ای برای حالت باربرداری بارگذاری مجدد، شبیه سازی رفتار برگشت ناپذیر خاک در نمودار تنش انحرافی- محوری را بررسی کردند و رابطه (۲۳) را برای تعیین مدول باربرداری- بارگذاری مجدد خاک ارائه نمودند.

$$E_{ur} = k_{ur} p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \quad (23)$$

در این رابطه  $k_{ur}$  ضریب مدول سختی است که مقدار آن برای شرایط باربرداری- بارگذاری مجدد، مشابه پارامتر  $k_i$  تعیین می گردد و  $n$  عدد توان است که مقدار تغییرات  $E_{ur}$  با  $\sigma_3$  را نشان می دهد.

نتایج تجربی نشان می دهد که به طور کلی  $E_{ur}$  f  $E_t$  است. در مورد خاص بر اساس نتیجه داده های آزمایشگاهی، ونگ و دانکن<sup>۱۲</sup> [۱۶] به این نتیجه رسیدند که  $k_{ur}$  ۱ تا ۳ مرتبه از  $k_i$  بزرگ تر است، در حالی که  $n$  اساساً برای بارگذاری اولیه و باربرداری- بارگذاری مجدد یکسان بود. ضریب پواسون نیز باید ثابت باشد. محققان دیگر این فرضیه را اصلاح کردند که در ادامه به آن اشاره خواهد شد.

## ۵- اصلاحات پیشنهاد شده توسط کاهوی و دانکن<sup>۱۳</sup>

کاهوی و دانکن رابطه ای بین کرنش محوری  $\epsilon_a$  و کرنش شعاعی  $\epsilon_r$  پیشنهاد کردند [۱۷]:

<sup>۱۲</sup> Wong and Duncan

<sup>۱۳</sup> Kulhawy and Duncan

$$\varepsilon_a = -\frac{\varepsilon_r}{f + D\varepsilon_r} \quad (24)$$

f و D پارامترهای مدل هستند. ارتباط این ضرایب با ضریب پواسون مماس توسط رابطه شماره ۲۵ مشخص می‌شود:

$$v_t = -\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \varepsilon_a} = \frac{f}{(1 - D\varepsilon_a)^2} \quad (25)$$

مطابق رابطه (۲۵)، f معادل مقدار اولیه  $v_i$  از ضریب پواسون مماس در کرنش صفر است و D نشانگر ضریب تغییر  $v_i$  با کرنش است.  $v_i$  به طور کل با افزایش  $\sigma_3$  کاهش می‌یابد؛ کاهوی و دانکن این عبارت زیر را پیشنهاد کرده‌اند:

$$v_i = G - F \log \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right) \equiv f \quad (26)$$

جایی که G مقدار  $v_i$  در  $p_a = \sigma_3$  است و F کاهش  $v_i$  برای افزایش ده برابری در  $\sigma_3$  است. با جایگزینی معادله (۲۵) در معادله (۲۶)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$v_t = \frac{G - F \log \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)}{(1 - D\varepsilon_a)^2} \quad (27)$$

با فرض اینکه  $\varepsilon_1 = \varepsilon_a$  و استفاده از رابطه (۲۱) و (۲۲) منجر به رابطه زیر می‌شود:

$$\varepsilon_1 = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{K p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \left[ 1 - \frac{R_f (1 - \sin \phi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2 (c \cos \phi + \sigma_3 \sin \phi)} \right]} \quad (28)$$

برای محاسبه ضریب پواسون مماس به طور مختصر:

$$v_t = \frac{G - F \log \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)}{\left[ 1 - \frac{D (\sigma_1 - \sigma_3)}{K p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \left[ 1 - \frac{R_f (1 - \sin \phi) (\sigma_1 - \sigma_3)}{2 (c \cos \phi + \sigma_3 \sin \phi)} \right]} \right]^2} \quad (29)$$

این توصیف از ضریب پواسون با مقادیر سه پارامتر مدلی یعنی G و F و D کنترل می‌شود.



## ۶- اصلاحات توصیه شده توسط هرمن<sup>۱۴</sup>

هرمن یک مدل اصلاحی روشنی را از مدل دانکن و چانگ ارائه کرده است [۱۸]. این اصلاحات به منظور جلوگیری از مشکلات جدی که در برخی تحلیل‌ها مشاهده شد، به وجود آمده است. نتیجه این بوده است که این خاک در برخی نواحی شاهد کاهش حجم زیادی بوده است؛ برای مثال به طور مؤثر به کلی از بین رفته است. بنابراین باعث از بین رفتن بقاء توده‌ها می‌شود. برای جلوگیری از این مشکل، فرض شده است که خاک یک ضریب حجمی ثابت  $B$  دارد. سپس ضریب پواسون از معادله زیر حساب می‌شود:

$$v_t = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E_t}{3B} \right) \quad (30)$$

یک بررسی به طور معمول برای اطمینان اینکه  $0 \leq v_t \leq 0.49$  باشد، انجام می‌شود.

## ۷- اصلاح پیشنهاد شده توسط دانکن

با فرض ثابت نگه داشتن یک عبارت مشابه برای  $E_t$  و  $E_{ur}$ ، آنچنان که توسط دانکن و چانگ معرفی شده است، دانکن فرض کرده است که  $B$  تنها به  $\sigma_3$  بستگی دارد و از تفاضل تنش اصلی مستقل است [۱۹]. معادله‌ای که در پایین آمده است برای مدول حجمی الاستیک مماسی است که:

$$B_t = K_b p_a \left( \frac{\sigma_3}{p_{atm}} \right)^m \quad (31)$$

در معادله مذکور،  $K_b$  عدد مدول حجم بدون بعد (مساوی با مقدار  $B/p_a$  در  $p_a = \sigma_3$ ) و  $m$  مدول حجم بدون بعد است (برابر است با تغییر در  $B/p_a$  برای افزایش ده برابر در  $\sigma_3$ ). در مورد تاریخچه بارگذاری-باربرداری-بارگذاری مجدد، اصلاحی از معادله (۳۱) توسط دانکن توصیه نشده است. با استفاده از معادله (۳۱) برای مدول حجم، ضریب پواسون طبق معادله زیر محاسبه می‌شود:

$$v_t = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{E_t}{3B_t} \right) \quad (32)$$

## ۸- تحقیقات انجام گرفته با استفاده از مدل هذلولی

در تحقیقی توسط ژانگ و همکاران در سال (۲۰۱۶) روش ساده شده‌ای برای آنالیز غیر خطی پاسخ بار-تغییر مکان یک شمع تکی و گروه شمع مدفون در خاک ماسه‌ای چند لایه ارائه شده است. برای تعیین روابط بین مقاومت اصطکاکی و تغییر مکان نسبی خاک-شمع که در جدار شمع و خاک در حال افزایش می‌باشد، از مدل هایپربولیک استفاده شده است. تغییر مکان محور شمع با این فرض تعیین می‌شود که تغییر مکان نسبی خاک-شمع در خاک تخریبی پیرامون محور شمع و تغییر مکان الاستیک عمودی خاک در توده خاک افزایش می‌یابد. با توجه به اینکه اثر اندرکنشی بین شمع‌ها برای یک شمع و گروه شمع‌ها در مدل هایپربولیک در نظر گرفته شده است، برای آنالیز پاسخ یک شمع تکی با گروه شمع‌ها برای تغییر شکل‌های افزایش یافته سیستم خاک-شمع یک برنامه کامپیوتری مؤثر با استفاده از مدل هایپربولیک تعریف گردید و پاسخ‌های بار-نشست به دست آمده با نتایج آزمایشگاهی و سایر روش‌ها مقایسه گردید و مطابقت خوبی داشتند [۲۰].

<sup>۱۴</sup> Herrmann

در تحقیق انجام شده توسط هنری و سیدی حسینی نیا (۱۳۹۵)، مدل سازی عددی دیوار خاک مسلح به روش محیط دوفازی و مدل رفتاری هذلولی مورد ارزیابی قرار گرفت. در این پژوهش، به توسعه روش محیط‌های دوفازی که چارچوب جدیدی در روش‌های همگن سازی محسوب می‌گردد، پرداخته شده است. این توسعه با به کارگیری مدل رفتاری هذلولی دانکن-چانگ در روابط محیط‌های دوفازی و شبیه سازی رفتار خاک توده مسلح با این مدل رفتاری انجام شده است. به بیان بهتر، در این مطالعه تلاش شده است تا با تخصیص مدل رفتاری هذلولی به خاک و اعمال مدل رفتاری ارتجاعی-خمیری کامل برای تسلیح کننده‌های توده مسلح، الگوی رفتاری جدیدی برای تحلیل محیط‌های خاک مسلح به صورت همگن ارائه شود. دیوار مذکور به دو صورت همگن و مجزا مورد تحلیل قرار گرفت. پس از بررسی نتایج تحلیل به دو روش اشاره شده و مقایسه آن‌ها با مقادیر اندازه گیری شده، مشاهده شد که در حالت تحلیل مجزا، مدل رفتاری هذلولی دانکن-چانگ، با وجود سادگی، پیش بینی مناسبی از رفتار دیوار خاک مسلح ارائه می‌دهد [۲۱].

در تحقیق دیگری در سال (۲۰۱۳) روش ساده سازی شده‌ای برای آنالیز غیر خطی پاسخ بار-تغییر مکان یک شمع تکی و گروه شمع با استفاده از روش بار-انتقال انجام شد و از مدل هایپربولیک برای شبیه سازی پاسخ بار-تغییر مکان هر دو پایه و محور شمع استفاده شد. سپس مدل هایپربولیک روی مقاومت اصطکاکی و مقاومت نوک انجام گرفت و نتایج آن با نتایج آزمایش بار روی شمع‌های مورد آزمایش، نشان داده شد. به علت استفاده از مدل هایپربولیک یک برنامه کامپیوتری بسیار مؤثر برای آنالیز پاسخ یک شمع تکی به کار برده شد و نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که تغییر مکان بالای شمع به وسیله روش فوق با افزایش نسبت شکست مقاومت اصطکاکی و مقاومت نوک به ازای یک بار یکسان افزایش می‌یابد. همچنین پارامترهای مدل هایپربولیک در تعیین مقاومت اصطکاکی و مقاومت نوک در یک شمع تکی در گروه شمع با در نظر داشتن عکس‌العمل بین شمع‌ها در گروه شمع تعیین می‌شود. روش معمول بار-انتقال می‌تواند برای آنالیز پاسخ بار-تغییر مکان یک شمع دلخواه در یک گروه شمع و با تعیین پارامترهای مدل هایپربولیک روی شمع تکی در گروه شمع و استفاده از روش توسعه یافته پیشنهاد داده شود. مقایسه نتایج پاسخ بار-نشست نشان می‌دهد که روش استفاده شده در این مقاله با نتایج عملی و آزمایشگاهی مطابقت خوبی دارد. در یک سطح بارگذاری یکسان بزرگترین و کوچکترین تغییر مکان بالای شمع در مرکز، کنج و گوشه شمع در گروه شمع نه تایی که به یک بلوک بتنی انعطاف پذیر متصل است مشاهده گردید. این اختلاف احتمالاً به علت درجه توسعه اثرات اندرکنشی برای شمع‌های تکی در موقعیت‌های مختلف شمع باعث شده است. اثرات اندرکنشی بین شمع‌های تکی در مرکز شمع بزرگتر از گوشه و کنج شمع است [۲۲].

همچنین در تحقیقی روش ویژه‌ای برای آنالیز رفتار بار-نشست شمع‌های درجا ارائه شده است. این روش به وسیله توابع بار-انتقال هایپربولیک برای تعیین رفتار غیر خطی مقاومت اصطکاکی و مقاومت نوک که به سادگی و روشنی شبیه سازی می‌شوند، به کار برده می‌شود. پارامترهای مورد نیاز ممکن است از نتایج آزمایشگاهی به دست آیند. روش ذکر شده برای آنالیز مقدماتی برنامه ریزی یک روش مناسب آزمایش بارگذاری و آنالیز دوباره آزمایش‌های بارگذاری برای بهینه سازی طراحی مفید می‌باشد [۲۳].

## ۹- نتایج

مزیت مدل ارتجاعی نیمه خطی بر اساس رابطه تنش- کرنش هایپربولیک، از سادگی و استفاده موفقیت آمیزشان در تحلیل تعدادی از مسائل عملی متفاوت ناشی می‌شود. مزیت‌های چنین مدلی به تربیت زیر است:

۱. مقدار پارامترهای مورد نیاز می‌تواند به آسانی از نتایج مجموعه آزمایش‌های تراکم سه محوره متقارن معمولی مشخص شوند. بنابراین استفاده از این مدل نیازمند برنامه‌های آزمایشی بسیار گسترده یا غیرمعمول نیست. این نکته مهم است زیرا که هزینه برخی از آزمایشات آزمایشگاهی غیرمعمول می‌تواند به راحتی از هزینه تحلیل اجزای محدود که برای آن اجرا می‌شود، بیشتر شود.

۲. اهمیت فیزیکی پارامترهایی که در این مدل دخیل هستند، به سادگی شناخته شده است؛ که موضوعی کمک کننده است. زیرا هر عاملی از این مدل که در شرایط فیزیکی قابل درک باشد موجب بهتر شدن تشخیص مهندسی می‌شود و تأثیر این تغییرات در مقدار پارامترها می‌تواند به سادگی پیش بینی شود.

۳. مقدار پارامترهایی که برای بسیار از این نوع خاکها مشخص شده‌اند، تحت شرایط زهکشی شده یا در شرایطی بدون زهکشی صورت گرفته‌اند. این داده برای تخمین مقدار پارامترها هنگامی که نوع و تراکم خاک شناخته شده باشد، مفید خواهد بود و همچنین برای تشخیص صحت آزمایشات آزمایشگاهی که از ابزارهایی از مقایسه بدست آمده‌اند با نتایجی از همان خاک مشابه به کار می‌رود.

۴. مدل نیمه خطی به طور نسبی برای برنامه‌های رایانه‌ای قابل اجرا است.

۵. در تحلیل مجزای دیوار با مدل دانکن و چانگ، به نظر می‌رسد که این مدل رفتاری، با وجود سادگی در حالت تحلیل مجزا نیز پیش‌بینی‌هایی مناسب و نزدیک به واقعیت از دیوار خاک مسلح ارائه می‌دهد.

رابطه هذلولی که بیانگر مشخصه‌های ایده‌آل از خاک است، برخی محدودیت‌های نسبتاً مهم دارد که عبارتند از:

۱. در این مدل گزارشی برای مقدار تنش اصلی میانه ( $\sigma_2$ ) صورت نگرفته است. بنابراین صحت پیش‌بینی بر طبق شرایط سه محوری متقارن می‌تواند مورد سوال قرار گیرد.

۲. براساس قانون هوک، این رابطه‌ها بیشتر برای تحلیل تنش و تغییر مکان اولیه در هنگام گسیختگی مناسب هستند. این رابطه‌ها قادر به پیش‌بینی صحیح رابطه‌های غیرخطی بین بارها و تغییر مکان‌ها هستند و این امکان وجود دارد که تحلیل تا مرحله‌ای پیش برود که برخی المان‌ها دچار گسیختگی موضعی شوند. در نتیجه این پاسخ مدت زمان زیادی قابل موثق و معتبر نخواهد بود، و این امکان وجود دارد که پاسخ در حوزه رفتاری خاک در هنگام و پس از گسیختگی، غیرواقعی باشد. بنابراین این رابطه‌ها برای تحلیل مرحله‌ای که ناپایداری خاک وجود دارد مفید نخواهند بود. آن‌ها برای پیش‌بینی تغییر مکان در توده خاک پایدار مناسب هستند.

۳. رابطه‌های هذلولی به علت تغییر در تنش برشی، شامل تغییر حجم نمی‌شوند. بنابراین روابط، محدود به تراکم ماسه‌هایی است که تحت فشار جانبی قرار دارند. برای اشاره به این نقطه ضعف، باتراست و کارپوراپ<sup>۱۵</sup> [۲۴] مدل دانکن را با ترکیب یک زاویه اتساع برای شبیه سازی انبساط خاک‌ها ادامه دادند.

۴. برای برخی از ترکیب‌های پارامترها و تنش‌ها، مقدار ضریب پواسون مماس از ۰/۵ فراتر خواهد رفت. با این حال، از آنجا که مشاهدات ترمودینامیکی مقدار ضریب پواسون را به بازه خاصی ( $0 \leq \nu_p \leq 0.5$ ) محدود می‌کنند، در اکثر برنامه‌های رایانه‌ای که این پارامترها را به کار برده‌اند؛ زمانی که مقدار  $\nu_p$  فراتر از بازه ذکر شده رود، مقدار آن ۰/۴۹ در نظر گرفته می‌شود.

۵. این پارامترها، مشخصه‌های اصلی خاک نیستند و تنها مقدار ضریب تجربی هستند که نشان دهنده رفتار خاک تحت بازه محدودی از این شرایط هستند. مقادیر این پارامترها به تراکم خاک، رطوبت خاک، محدوده فشار مورد استفاده در آزمایش و شرایط زهکشی بستگی دارند. به منظور اینکه این پارامترها نماینده‌ای از رفتار خاک تحت این شرایط باشند، شرایط آزمایشات آزمایشگاهی باید مطابق با شرایط طبیعی خاک و با توجه به فاکتورهای گفته شده، باشد.

۶. مدل هذلولی در پیش‌بینی منحنی تنش- کرنش خاک‌های با رفتار نرم شونده در کرنش‌های بزرگ ضعیف عمل می‌کند. به دلیل ماهیت فرمول‌بندی این مدل رفتاری و این که نمودار تنش- کرنش در کرنش‌های بزرگ به یک مجانب می‌رسد، این مدل نمی‌تواند رفتار نرم شوندگی خاک و یا همان افت مقاومت در کرنش‌های بزرگ را شبیه‌سازی کند؛ بنابراین می‌توان گفت که مدل هذلولی تنها در محدوده کرنش‌های نسبتاً کوچک، می‌تواند رفتار حقیقی انواع خاک‌ها را با دقتی مناسب پیش‌بینی نماید.

## ۱۰- نتیجه گیری

رابطه هذلولی که بیانگر مشخصه‌های ایده‌آل از خاک است، دارای مزایایی مانند استفاده از مدل بدون نیاز به برنامه‌های آزمایشی بسیار گسترده، قابل اجرا بودن مدل نیمه خطی برای برنامه‌های رایانه‌ای و قابل درک بودن پارامترهای مدل در شرایط فیزیکی و در نتیجه

<sup>۱۵</sup> Bathurst and Karpurapu

بهبتر شدن تشخیص مهندسی می‌باشد. نتایج نشان می‌دهد که با وجود همه تلاش‌هایی که در زمینه رفع کاستی‌های این مدل انجام شده است و با توجه به سادگی و کالیبراسیون ساده، این مدل قادر به پیش‌بینی رفتار پلاستیک خاک‌های نیمه اشباع نمی‌باشد. این مدل همچنین دارای محدودیت‌هایی مانند نبود گزارشی برای مقدار تنش اصلی میانه ( $\sigma_2$ )، مناسب نبودن روابط این مدل برای تحلیل مرحله‌ای که ناپایداری خاک وجود دارد، مفید نبودن روابط هذلولی در شرایط تغییر حجم خاک به علت تغییر در تنش برشی و تجربی بودن ضرایب مورد استفاده در روابط و اینکه این ضرایب، مشخصه‌های اصلی خاک نیستند و تنها نشان دهنده رفتار خاک تحت بازه محدودی از شرایط هستند.

## مراجع

- [۱] Mansourzadeh, M. Vafaeian, M. and Mirmohammad sadeghi, M. ۲۰۰۸. Application of unsaturated soil theory in investigation of fill stability, Journal of transportation, ۵: ۲. ۱۷۷-۱۸۶. (Translate in Persian)
- [۲] Fredlund, D. G. and Rahardjo, H. ۱۹۹۳. Soil mechanics for unsaturated soils, London: John Wiley & Sons.
- [۳] Forooshani, M.H. and Latifi-Tamin, M. ۲۰۰۹. Investigation of unsaturated soils behavioral models, The ۸<sup>th</sup> International Congress on Civil Engineering, Shiraz University. (Translate in Persian)
- [۴] Alonso, E. E., Gens, A. and Josa, A. ۱۹۹۰. A Constitutive Model for Partially Saturated Soils, Geotechnique. ۴۰: ۳. ۴۰۵-۴۳۰.
- [۵] Karube, D. Kawai, K. ۲۰۰۱. The role of pore water in mechanical behavior of unsaturated soil, Geotechnique and Geological Engineering. Special Issue on unsaturated soils. ۱۹: ۳. ۲۱۱-۲۴۱.
- [۶] Fredlund, D.G. Morgenstern, N.R. Widger, R.A. ۱۹۷۸. Shear strength of unsaturated soils, Canadian Geotechnical Journal. ۱۵: ۳. ۳۱۳-۳۲۱.
- [۷] Jommi, C. ۲۰۰۰. Remarks on the constitutive modeling of unsaturated soils, Engineering and Construction in Tropical and Residual Soils, A. Tarantino and C. Mancuso, eds. Balkema, Rotterdam, The Netherlands, Honolulu, HI. ۱۳۹-۱۵۳.
- [۸] Toll, D.G. ۱۹۹۰. A framework for unsaturated soil behaviour, Geotechnique. ۴۰: ۱. ۳۱-۴۴.
- [۹] Wheeler, S.J. and Sivakumar, V. ۱۹۹۵. An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soils, Geotechnique. ۴۵, ۳۵-۵۳.
- [۱۰] Gatmiri, B. and Delage, P. ۱۹۹۵. A New Void Ratio Surface Formulation for the Nonlinear Elastic Constitutive Modelling of Unsaturated Soil, Proc. ۱st Int. Conf. on Unsaturated Soils, Paris, ۱۰۴۹-۱۰۵۶.
- [۱۱] Gatmiri, B., Delage, P. and Cerrolaza, M. ۱۹۹۸. Udam: Powerful Finite Element Software for the Analysis of Unsaturated Porous Media, Advance in Engineering Software. ۲۹: ۱. ۲۹-۴۳.
- [۱۲] Konder, R. L. ۱۹۶۳. Hyperbolic Stress-Strain Response: Cohesive Soils, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division. ASCE, ۸۹(SM۱): ۱۱۵-۱۴۳.
- [۱۳] Konder, R. L. and Horner, J. M. ۱۹۶۵. Triaxial Compression of a Cohesive Soil with Effective Octahedral Stress Control, Canadian Geotechnical Journal. ۲: ۱. ۴۰-۵۲.
- [۱۴] Janbu, N. ۱۹۶۳. Soil Compressibility as Determined by Oedometer and Triaxial Tests, European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Wissbaden, Ger-many, ۱: ۱۹-۲۵.

- [۱۵] Duncan, J. M. and Chang, C.Y. ۱۹۷۰. Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, ۹۶(SM۵): ۱۶۲۹-۱۶۵۳.
- [۱۶] Wong, K. S. and Duncan J. M. ۱۹۷۴. Hyperbolic Stress-Strain Parameters for Nonlinear Finite Element Analysis of Stresses and Movements in Soil Masses, Report No. TE ۷۴-۳, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.
- [۱۷] Kulhawy, F. H. and Duncan, J. M. ۱۹۷۲. Stresses and Movements in Oroville Dam, Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, ASCE, ۹۸: ۷. ۶۵۳-۶۶۵.
- [۱۸] Herrmann, L. R. ۱۹۷۸. User's Manual for REA (General Two Dimensional Soils and Reinforced Earth Analysis Program), Department of Civil Engineering Report, University of California, Davis.
- [۱۹] Duncan, J. M. ۱۹۸۰. Hyperbolic Stress-Strain Relationships, Proceedings of the Workshop on Limit Equilibrium, Plasticity and Generalized Stress-Strain in Geotechnical Engineering, edited by R. K. Yong and H-Y. Ko. ASCE press, ۴۴۳-۴۶۰.
- [۲۰] Zhang, Q-q. Liu, SH-W. Zhang, SH-M. Zhang, J. Wang, K. ۲۰۱۶. Simplified non-linear approaches for response of a single pile and pile groups considering progressive deformation of pile-soil system, Journal of Soils and Foundations. ۵۶: ۳. ۴۷۳-۴۸۴.
- [۲۱] Honari, S. Seyedi Hosseininia, S. E. ۲۰۱۶. Numerical Modeling of Reinforced Soil Walls Using Multiphase Approach and Hyperbolic Constitutive Model. Journal of Civil Engineering of the Ferdowsi University of Mashhad. ۲۸: ۱. ۸۱-۹۸. (Translate in Persian)
- [۲۲] Zhang, Q-q. Li, Sh-c. Liang, F-y. Yang, M. Zhang, Q. ۲۰۱۳. Simplified method for settlement predication of single pile and pile group using a hyperbolic model, International Journal of Civil Engineering. ۱۲: ۲. ۱۴۶- ۱۵۹.
- [۲۳] Hirayama, H. ۱۹۹۰. Load-Settlement Analysis for Bored Piles Using Hyperbolic Transfer Functions. Journal of Soils and Foundations, ۳۰: ۱. ۵۵-۶۴.
- [۲۴] Bathurst, R. J. and Karpurapu, R. G. ۱۹۹۰. Large-Scale Reinforced-Soil Wall Tests and Numerical Modelling of Geosynthetic Reinforced Soil Structures, Report to the Chief of Construction and Properties. Department of National Defense. Royal Military College of Canada, Kingston, Canada.