



Research Article

New Method for Analyzing Complex Trusses and Articulated Frames

Seyed Mahmoud Reza Mortazavi¹, Reza Esmailabadi^{2*}, Alireza Fiuoz³

1. Ph.D. Student in Civil Engineering, Structural Orientation, Azad University, Roodehen Branch, Tehran, Iran

2. Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran

3. Assistant Professor, Civil Engineering Department, Persian Gulf University, Boushehr, Iran

Received: 28 April 2023; Revised: 27 May 2023; Accepted: 30 May 2023

Abstract

A complex truss is a structure consisting of triangular units made up of long, narrow components that are joined at the end by a joint. Such structures are widely used in construction and industrial structures due to their ability to transmit force in long distances and spans between supports. The force of members of complex trusses, unlike simple and compound trusses, cannot be calculated using equilibrium equations alone. In recent years, Henneberg and virtual work methods that follow similar principles have been used to analyze and calculate the force of members of obscure trusses, in order to calculate the force of the members, the complex trusses have to be analyzed twice, their calculations are very long and time consuming. In this new method, there is no need to analyze the complex truss two or more times, and in a shorter time by writing less equilibrium equations and with one analysis structure, the force of the complex truss members is obtained. Another advantage of this new method is the control of calculations performed in each step independently. In addition to certain complex trusses, this method also has the ability to analyze indeterminate complex trusses and so simple hinged frame with concentrated brace, which other methods do not have this capability. This new method the force of all members is obtained with one analysis of complex truss.

Keywords:

Complex truss; Structure analysis; Equilibrium equations; Simple frame structure; Concentrated brace.

Cite this article as: Mortazavi, M. R., Esmailabadi, R., & Fiuoz, A. (2023). New Method for Analyzing Complex Trusses and Articulated Frames. *Civil and Project Journal*, 5(2), 50-73. <https://doi.org/10.22034/cpj.2023.398743.1202>

ISSN: 2676-511X / Copyright: © 2023 by the authors.

Open Access: This article is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License, which permits use, sharing, adaptation, distribution and reproduction in any medium or format, as long as you give appropriate credit to the original author(s) and the source, provide a link to the Creative Commons licence, and indicate if changes were made. The images or other third party material in this article are included in the article's Creative Commons licence, unless indicated otherwise in a credit line to the material. If material is not included in the article's Creative Commons licence and your intended use is not permitted by statutory regulation or exceeds the permitted use, you will need to obtain permission directly from the copyright holder. To view a copy of this licence, visit <https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>

Journal's Note: CPJ remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.

* Corresponding author E-mail address: reza.esmaeilabadi@iaau.ac.ir



نشریه عمران و پروژه

<http://www.cpjournals.com/>

روش جدید تحلیل خرپاهای پیچیده و قاب های ساده با مهاربند همگرا

سید محمود رضا مرتضوی^۱، رضا اسماعیل آبادی^{۲*}، علیرضا فیوض^۳

۱- دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رودهن، رودهن، ایران

۲- استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد رودهن، رودهن، ایران

۳- استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

تاریخ دریافت: ۸ اردیبهشت ۱۴۰۲؛ تاریخ بازنگری: ۶ خرداد ۱۴۰۲؛ تاریخ پذیرش: ۹ خرداد ۱۴۰۲

چکیده

خرپا پیچیده سازه ای است متشکل از واحدهای مثلثی که از اتصال اجزای باریک و بلند که در انتها با مفصل به یکدیگر متصل شده اند ساخته می شوند. این گونه سازه ها به دلیل توانایی انتقال نیرو در فواصل و دهانه های بلند بین تکیه گاه، کاربرد وسیعی در سازه های ساختمانی و صنعتی دارند. نیروی اعضای خرپاهای مبهم و پیچیده بر خلاف خرپاهای ساده و مرکب، تنها با استفاده از معادلات تعادل قابل محاسبه نمی باشد. در سال های گذشته از روش های هنبرگ و کار مجازی که از اصول تحلیلی مشابهی تبعیت می نمایند برای تحلیل و محاسبه نیروی اعضای خرپاهای مبهم استفاده شده که در این روش ها برای محاسبه نیروی اعضا می بایست خرپاهای پیچیده را دوبار تحلیل نمائیم که محاسبات آن ها بسیار طولانی و وقت گیر می باشد. در روش جدید ارائه شده در این مقاله، دیگر نیازی به تحلیل دو و یا چند باره خرپای پیچیده نبوده و در زمان کوتاه تر و با نوشتن معادلات تعادل کمتر و با یک بار تحلیل سازه، نیروی اعضای خرپای مبهم بدست می آید. از دیگر مزایای این روش جدید، کنترل محاسبات انجام شده در هر مرحله بصورت مستقل می باشد. این روش علاوه بر خرپاهای پیچیده معین، توانایی تحلیل خرپاهای پیچیده نامعین و قاب های مفصلی ساده با مهاربندهای همگرا را نیز دارد که سایر روش ها این قابلیت را دارا نمی باشند. در این روش جدید نیروی همه اعضا با یک بار تحلیل خرپا بدست می آید.

کلمات کلیدی

خرپای پیچیده، تحلیل سازه، معادلات تعادل، قاب ساختمانی ساده، مهاربند همگرا

۱- مقدمه

خرپاها سازه‌هایی هستند که از اعضای محوری تشکیل می‌شوند و به علت وجود مفصل در کلیه اتصالات، اعضای آن‌ها دو نیرویی بوده و لنگر خمشی و برش در آن‌ها بوجود نمی‌آید یا مقدار آن ناچیز است و معمولاً برای ایجاد مقاومت در برابر بارهای خارجی، طراحی به گونه‌ای انجام می‌شود که بارگذاری بر روی مفاصل آنها قرارگیرند. همچنین در بسیاری از مواقع جهت پوشش سقف‌ها در دهانه‌های بزرگ از مدل خرپاهای پیچیده که به سازه‌های فضا کار موسوم می‌باشند استفاده می‌شود. از طرفی سیستم‌های خرپایی در مقایسه با سایر سازه‌ها، مصالح نسبتاً کمتری مصرف می‌شود و برای ساختن سازه‌های خرپایی نیروی کار و هزینه کمتری نیاز است، به همین سبب خرپاها برای انتقال بار خصوصاً در دهانه‌های بلند و در زمینه ساخت سازه‌های فضایی کاملاً مناسب و کارآمد بوده و امروزه در اغلب سازه‌های ساختمانی و صنعتی کاربرد وسیع و گسترده‌ای دارند که قابلیت و توانایی این خرپاها در انتقال بارگذاری، دست طراحان و مهندسان سازه را برای طراحی متنوع و کارآمد باز می‌گذارد.

خرپا در قسمت‌های مختلفی از انواع سازه کاربرد دارد که از جمله آن‌ها می‌توان به سازه سقف ساختمان‌های صنعتی یک طبقه، سقف‌های بلند، سقف ساختمان‌های چند طبقه، پل‌ها با دهانه‌های بلند، ستون و تیرهای خرپایی، انواع جراثقال، بدنه کشتی‌ها و هواپیماها و ... اشاره نمود. خرپاها در بخش‌های گفته شده با هدف ایجاد استحکام در مقابل بارهای ثقیلی مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین خرپاها در قسمت‌های دیگر سازه با هدف افزایش مقاومت در برابر بارهای جانبی و ایجاد ثبات و پایداری مورد استفاده قرار می‌گیرند. معمولاً خرپاها در انتقال بارهای سنگین در دهانه بزرگ به خوبی عمل می‌نمایند که به آنها سازه‌های مشبک نیز گفته می‌شود. کاربرد دیگر در کمربندهای مشبک که معمولاً سبک‌تر از کمربندهای معمولی بوده و کاملاً اقتصادی و به صرفه هستند. این شبکه‌ها به عنوان سیستم پشتیبانی کف در ساختمان‌های چند طبقه نیز به کار گرفته می‌شوند. با انجام این کار، عمق همه‌ی دهانه‌های مشبک درون خرپاها بدون افزایش عمق سقف به راحتی صورت می‌گیرند.

خرپاهای مبهم فضایی بخشی جدایی‌ناپذیر از معماری مدرن هستند که به دلیل اینکه خرپا، وزن زیادی را در دهانه بزرگ تحمل می‌کند این امکان را برای سازندگان به وجود می‌آورد که هزینه‌ها را تا حد امکان کاهش داده، به راحتی فواصل زیاد را با خرپاهای پیچیده پوشش دهند، به طور مساوی بار را روی سازه منتقل کنند، وزن سازه را کاهش دهند، در مصرف مصالح صرفه جویی کنند و سازه‌هایی بسازند که تعمیر و نگهداریشان به خوبی میسر باشد.

همانگونه که اشاره شد خرپاها مجموعه از اعضای میله‌ای دو نیرویی هستند که همگی تشکیل شبکه مثلثی را ایجاد می‌نمایند به طوری که اعضا در انتهای خود به اعضای دیگر لولا شده‌اند و تشکیل شبکه مثلثی پایدار را می‌دهند. اعضای خرپاها به عنوان اعضاء دو نیروئی توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری را دارند که در در سقف‌ها، پل‌ها، و سازه‌های هوافضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این گونه سازه‌ها برای عدم تشکیل نیروی برشی و لنگر خمشی در تک تک اعضاء تشکیل دهنده، اتصالات آنها باید به صورت مفصلی باشد. خرپای پیچیده صفحه‌ای بخشی از خرپاهای فضایی از نوع سازه‌های فضاکار می‌باشند که برحسب تعریف از مجموعه‌ای از اعضایی بوجود می‌آید که همگی در یک صفحه قرار داشته و ترکیب آنها یک شبکه مثلثی ایجاد می‌نماید. تحلیل و محاسبه نیروی اعضای خرپاهای پیچیده مشابه خرپاهای ساده و مرکب نمی‌باشند و تحلیل و بدست آوردن نیروی هریک از اعضای آن توسط معادلات تعادل استاتیکی به تنهایی امکان‌پذیر نیست. طی سال‌های گذشته برای تحلیل این خرپاها روش‌های هنبرگ و کار مجازی که از اصول مشابهی تبعیت می‌کنند ارائه شده است ولی هریک از این روش‌ها به دلیل اینکه می‌بایست خرپا را دوبار تحلیل نموده و سپس معادلات را باهم ترکیب نمائیم، بسیار وقت‌گیر، طولانی و بعضاً با بروز خطا در محاسبات همراه می‌باشد. روش جدید ارائه شده در این مقاله، یک شیوه تئوری ریاضی تحلیلی سریع، کاربردی و پر قدرت در زمینه تحلیل انواع خرپاهای پیچیده معین و نامعین می‌باشد و روش‌هایی که سابقاً ارائه شده‌اند این قابلیت را نداشته و

محدودیت‌هایی دارند، همچنین با گسترش و تعمیم این روش جدید، امکان تحلیل قاب‌های مفصلی با مهاربندهای همگرا و سایر انواع سازه‌های خرپایی به سادگی و در کوتاه‌ترین زمان، میسر می‌باشد. از مزایای دیگر این روش جدید کنترل محاسبات در تمامی قسمت‌ها و مستقل از مراحل دیگر تحلیل می‌باشد، همچنین نیازی به دو و یا چندین باره تحلیل خرپا نبوده و این روش جدید کاربردی‌تر و دقیق‌تر از روش‌های قبلی می‌باشد و فراگیری آن برای مخاطبان و مهندسان خصوصاً دانشجویان راحت‌تر و سریع‌تر خواهد بود. این روش جدید با هدف ارائه یک شیوه تئوری نوین برای تحلیل انواع خرپاها بویژه خرپاهای پیچیده معین و نامعین داخلی و همچنین قاب‌های ساده با مهاربند همگرا می‌باشد که آموزش و محاسبه آن را برای کلیه دانشجویان و مهندسان تسهیل می‌نماید به طوری که با بکارگیری این روش جدید، انواع خرپای پیچیده و سایر سازه‌های خرپایی معین و نامعین مانند قاب‌های ساده مفصلی با مهاربند همگرا به راحتی تحلیل و نیروی اعضای آن‌ها قابل محاسبه خواهند بود.

خرپاها از لحاظ نحوه تشکیل و آرایش میله‌ها (اعضا) به انواع خرپاهای ساده^۱ خرپاهای مرکب^۲ و خرپاهای پیچیده^۳ تقسیم بندی می‌شوند. خرپاها به ۳ گروه زیر تقسیم می‌شوند:

خرپای ساده: از مفصل نمودن سه عضو در انتها به یکدیگر و ایجاد شبکه مثلثی ساخته می‌شود و توسعه آن هر بار با اضافه نمودن دو عضو و یک مفصل صورت می‌گیرد.

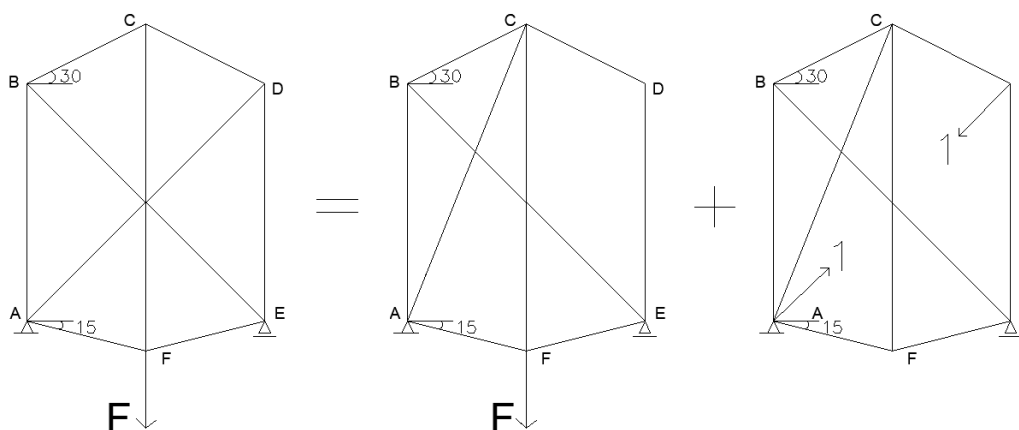
خرپای مرکب: این نوع خرپا ترکیبی از چند خرپای ساده است.

خرپاهای پیچیده و مبهم: خرپاهایی که دارای مشخصات خرپای ساده و مرکب نیستند

خرپاها را به لحاظ تعداد اعضا و مفاصل تشکیل دهنده می‌توان به ۲ دسته‌ی معین^۴ و نامعین^۵ استاتیکی تقسیم‌بندی کرد.

تحلیل و بدست آوردن نیروی اعضای خرپاهای ساده و مرکب به کمک معادلات تعادل استاتیکی ($\sum F_x=0, \sum F_y=0$) امکان پذیر خواهد بود. در خرپاهای مبهم تحلیل و بدست آوردن نیروی هر یک از اعضای آن به دلیل آنکه هیچ مفصل دو عضوی ندارد، به کمک روابط تعادل مشابه آنچه که در خرپاهای ساده یا مرکب انجام می‌شد امکان پذیر نیست. روش‌هایی که تاکنون برای تحلیل و بدست آوردن نیروی اعضای اینگونه خرپاها ارائه شده است مانند روش هنبرگ^۶ در کتاب تحلیل مقدماتی سازه [۱] و کتاب تئوری مقدماتی سازه [۲] و کتاب مقدمه‌ای بر مکانیک جامدات [۳] یا روش کار مجازی^۷ [۴-۱۰] به دلیل آنکه کل خرپا باید دوبار تحلیل شود بسیار وقت گیر و بعضاً به دلیل طولانی بودن محاسبات با بروز خطاهای محاسباتی روبروست که این موضوع سبب شده تا در برخی از دانشگاه‌های ایران، آموزش و تدریس نحوه محاسبه و تحلیل این سازه‌ها از سرفصل آموزشی توسط استاد مربوطه حذف و یا به اختصار اشاره‌ای گردد که برخلاف آئین‌نامه آموزشی در ایران و تمامی دانشگاه‌های سراسر دنیا می‌باشد. در روش هنبرگ (شکل ۱) و کار مجازی با انتقال یک عضو به مفصل دیگر، یک بار خرپای جدید را با وجود بارهای خارجی وارد بر آن تحلیل نموده، مجدداً خرپای جدید را بدون حضور بارهای خارجی و با اعمال بار واحد مجازی به جای عضو جابجا شده تحلیل و نیروهای اعضای آن را بدست می‌آوریم. سپس با کمک جمع آثار قوا، نیروی عضو جابجا شده می‌بایست برابر صفر گردد [۱۱].

1 Simple truss
2 Compound truss
3 Complex truss
4 Determinate
5 Indeterminate
6 Henneberg's Method
7 Virtual work Method



شکل ۱- روش تحلیل خرپای مبهم هنبرگ.

تا به امروز در اغلب موارد خرپاهای مبهم و پیچیده با استفاده از روش‌های طولانی و یا با کمک رایانه تجزیه و تحلیل می‌شوند [۱۲]. در روش جدید ارائه شده در این مقاله با استفاده از یک مدل ریاضی تحلیلی، مراحل تحلیل با استفاده از معادلات تعادل استاتیکی، به گونه‌ای سریع، کارآمد و با امکان بررسی و بازبینی هریک از مراحل تحلیل به صورت مجزا انجام می‌گیرد و تحلیل و محاسبه نیروی هریک از اعضای این سازه‌ها با یک بار تحلیل آن بدست می‌آید. در واقع در این روش جدید، به کمک یک ایده جدید و با معادلات ریاضی و استاتیکی، نیروی اعضای خرپا به راحتی و بسیار سریعتر و کوتاه تر از سایر روش‌های ارائه شده در این خصوص، قابل محاسبه خواهد بود.

در اواخر قرن نوزدهم، مهندس بلژیکی به نام ژول آرتور ویرندیل حق اختراع نوع جدیدی از تیر را به ثبت رساند. مشخصه آن فقدان اعضای مورب قاب است، چیزی که به نظر می‌رسد با شرایط پایداری و تعادل در تناقض است، همراه با تغییر شکل قابل توجه و محاسبه دشوار آن، باعث شد تا تکنسین‌های زمان خود در مورد کاربرد آن تردید داشته باشند. با این وجود، کاربرد آن در قرن بیستم محبوبیت زیادی پیدا کرد و هم در مهندسی عمران و هم در معماری مورد استفاده قرار گرفت.

مزایای خرپا ویرندال در مقایسه با انواع دیگر مانند خرپاهای مورب در این مقاله مطالعه شده است. در این مقاله، گونه‌شناسی ویرندیل به همراه ویژگی‌های اصلی، محاسبه و اجرای آن در کارهای عمرانی و معماری معرفی می‌شود. پونز و همکاران در سال ۲۰۱۹ بر روی خرپای ویرندال مطالعه انجام داده است [۱۳].

سان و همکاران در سال ۲۰۲۲ به ارزیابی عملکرد ساختار خرپا از طریق ترکیب عناصر ابری مطالعه انجام دادند. ارزیابی عملکرد پل‌های خرپایی به دلیل ساختار پیچیده و اجزای متعدد آنها بسیار دشوار است. مقاله آن‌ها یک چارچوب ارزیابی برای سازه‌های خرپایی با استفاده از تکنیک اینترنت اشیا ایجاد می‌کند و یک روش جدید برای افزایش دقت ارزیابی براساس همجوشی عناصر ابری پیشنهاد می‌کند. آزمایشی بر روی یک خرپا آزمایشگاهی که مجهز به دستگاه‌های نظارتی بود انجام شد. سپس سیستم مانتورینگ، ماژول ذخیره سازی داده‌ها و تجهیزات بارگیری توسط تکنیک اینترنت اشیا متصل شدند و سپس برای انجام ارزیابی بلادرنگ به ماژول پردازش داده منتقل شدند. علاوه بر این، در ماژول پردازش داده، عنصر ماده ابری می‌تواند به طور موثر ویژگی‌های ارزیابی چندگانه را در یک سیستم ارزیابی جهانی ادغام کند و تصادفی بودن موجود در داده‌های نظارت و مبهم بودن ذاتی در فرآیند ارزیابی را می‌توان به‌طور مصنوعی توسط مدل‌های ابری ایجاد شده در نظر گرفت. سپس این ویژگی‌های ارزیابی با وزن‌های مربوط با همجوشی ترکیب می‌شوند تا عملکرد نهایی خرپا آزمایشی به دست آید. نتایج نشان می‌دهد که دقت ارزیابی را می‌توان به وضوح از ۴۶٫۱٪ به ۹۹٫۵٪ با روش پیشنهادی افزایش داد. روش پیشنهادی در این مطالعه تصویری از ارزیابی موثر برای ساختار خرپاها ارائه می‌کند [۱۴].

نیو و همکاران در سال ۲۰۱۸ روی روش فرم‌یابی یکپارچه با در نظر گرفتن انعطاف‌پذیری خرپا و مفصل پیشنهاد شده است. در مرحله اول، خرپا توسط تیر اویلر-برنولی مدل‌سازی می‌شود و مفصل با اتصال انعطاف‌پذیر با شش درجه آزادی برای تشکیل عنصر یکپارچه توصیف می‌شود. این عناصر با توجه به توپولوژی خرپا جمع می‌شوند تا معادله تعادل خرپا به دست آید. ثانیاً، شرایط مرزی برای متراکم کردن درجات آزادی گره‌های تیر اعمال می‌شود، به طوری که میله‌ها، مفصل‌ها و شبکه‌های کابلی را می‌توان با اتخاذ شرایط سازگاری متناظر با یکدیگر ترکیب کرد و سپس معادله تعادل مدل جفت شده برقرار می‌شود. در نهایت، روش فرم‌یابی یکپارچه با ترکیب روش بهینه‌سازی مبتنی بر گرادیان در مدل جفت شده شکل می‌گیرد. این روش بیشتر برای یافتن فرم طراحی بازتابنده‌های مش خرپا اعمال می‌شود و مطالعات موردی مربوطه ارائه شده است. ضرایب سختی سه نوع مفصل در شش درجه آزادی اندازه‌گیری و استفاده می‌شود، پارامترهای طراحی به دست آمده به آباکوس وارد می‌شوند تا سطح انعکاسی واقعی شکل گرفته را محاسبه کنند تا نتیجه تأیید شود. نتایج فرم‌یابی نیز با نتایج موجود در بخش‌های قبلی مقایسه می‌شود. ثابت شده است که روش پیشنهادی در شکل‌یابی بسیار مؤثر است و از انحرافات شکل و توزیع نیرو سطوح بازتابنده ناشی از تغییر شکل سازگار کاملاً اجتناب می‌شود [۱۵].

اشمیت و میورا [۱۶] نرم افزار ACCESS 1 (ترکیبی از FEM و برنامه نویسی ریاضی) را برای تجزیه و تحلیل اعضای ساختاری توسعه دادند. روشی جهت بهینه‌سازی انواع مدل خرپا با استفاده از برنامه بیان شده پیشنهاد دادند [۱۷]. بهینه‌سازی توپولوژی خرپاها توسط رینگرز انجام شد، تمرکز آن بر حذف محدودیت‌های غیرفعال با استفاده از روش تکراری گاوس-سیدل است. در این روش، محدودیت‌های تنش و جابجایی بر سازه اعمال شد. [۱۸]. حسن و همکاران در سال ۲۰۱۹ روش اجزای محدود در پیکربندی اولیه مدل مورد نظر پیاده‌سازی نموده و از نتایج آن برای فرمول‌بندی یک مسئله برنامه‌ریزی غیرخطی برای دستیابی به راه‌حل‌های بهینه استفاده شده است [۱۹]. خرپا ویراندال یک سازه محبوب در کف انتقال ساختمان‌های بلند که نیاز به باز شدن درها و پنجره‌ها دارند، می‌باشد. جذابیت این خرپا از حذف عضو مورب ناشی می‌شود که امکان استفاده کامل از فضای ساختاری را فراهم می‌کند. خرپا ویراندال دارای اشکال مختلف است، مانند خرپا ویراندال با فضای مساوی، خرپا ویراندال با فضای نابرابر، خرپا ویراندال چند لایه، خرپا ویراندال پلکانی. علاوه بر این، چندین خرپا ویراندال را می‌توان در دو یا سه جهت مرتب کرد تا یک شبکه ویراندال را تشکیل دهد. محققان کورول و همکاران، اتصالات عرض نابرابر خرپای ویراندال با مقاطع توخالی مربع را مورد بررسی قرار دادند [۲۰]. شهااتا و همکاران، تجزیه و تحلیل المان محدود غیرکشسان خرپاهای ویراندال با مقاطع توخالی مستطیلی را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند [۲۱]. باشا و گوئل پیکربندی جایگزین بخش خرپایی ویژه برای قاب‌های خمشی خرپایی ویژه را مورد مطالعه قرار دادند [۲۲]. یوها هنگ با مطالعه بر روی انواع خرپاها، نشان داد که نیروی داخلی خرپا را می‌توان براساس قوانین ترکیب دو یا سه جسم صلب محاسبه کرد، همچنین نیروی داخلی خرپا پیچیده نیاز به قضاوت جامع و انعطاف‌پذیر براساس روش گره، روش مقطع و موقعیت اعضای صفر نیرویی دارد [۲۳].

همانگونه که در بالا اشاره شد، در سال‌های اخیر مطالعات و تحقیقات گسترده‌ای بر روی انواع خرپا و همچنین کاربردها در صنایع مختلف انجام گرفته است. همچنین روش‌های متنوعی در رابطه با تجزیه و تحلیل خرپاها و روابط و معادلات ریاضی ارائه گردیده است که بعضاً پیچیده، غیرکاربردی و یا نیازمند ابزار و رایانه و نرم‌افزارهای محاسباتی جانبی می‌باشند. روش جدید ارائه شده در این مقاله، یک روش تئوری تحلیلی محاسباتی بر پایه معادلات ریاضی و استاتیکی بوده که برای اولین بار توسط نویسندگان این مقاله ارائه می‌گردد و روشی قدرتمند در تحلیل و محاسبه سازه‌های خرپایی پیچیده معین و نامعین و همچنین قاب‌های مفصلی ساده با مهاربندهای همگرا می‌باشد. در خصوص اهمیت ارائه این روش تئوری تحلیلی منحصر به فرد می‌توان به محاسبات کوتاه‌تر و دقیق‌تر، آموزش و یادگیری راحت‌تر و ساده‌تر تحلیل اینگونه سازه‌ها در دانشگاه‌ها و مراکز علمی

و پژوهشی سراسر دنیا اشاره کرد، همچنین با کاهش قابل توجه حجم محاسبات، فرمول و کد نویسی در نرم‌افزارهای تحلیلی و محاسباتی سازه، سرعت تحلیل و پردازش پارامترها و داده‌ها در رایانه افزایش می‌یابد.

۲- رابطه سازی جدید

دستگاه معادلات تعادل برای تحلیل خرپاهای صفحه ای شامل $\sum F_x$ و $\sum F_y$ می‌باشد یعنی توانایی بدست آوردن حداکثر دو مجهول در هر گره (مفصل) خرپا را دارند. حال آنکه خرپاهای پیچیده در هر گره حداقل سه عضو غیر صفر دارند که به کمک معادلات تعادل استاتیکی به تنهایی قابل حل نیستند. در یک خرپای پیچیده، تحلیل و محاسبه نیروی اعضا خرپا به دلیل آنکه مفصل دارای سه عضو و یا بیشتر می‌باشد به کمک روابط تعادل امکان پذیر نمی‌باشد.

روش جدید ارائه شده بدین صورت انجام می‌شود که پس از بدست آوردن عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی خرپا، به دلخواه با انتخاب یک عضو، نیروی آن به صورت پارامتر معلوم با مقدار X فرض می‌گردد حال با داشتن نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی و نیروهای خارجی وارد بر خرپا، تحلیل خرپا را از یک مفصل آن به طور مثال مفصل متصل به تکیه گاه آغاز می‌کنیم. در این مفصل نیروی یک عضو مقدار پارامتر X را داشته و نیروی سایر اعضای متصل به این مفصل بر حسب پارامتر X بدست می‌آید. سپس با داشتن نیروی اعضای این مفصل بر حسب پارامتر X نیروی سایر اعضای خرپای پیچیده را بر حسب همین پارامتر فرضی X به کمک معادلات تعادل استاتیکی بدست می‌آوریم. نهایتاً در محاسبه نیروهای اعضای خرپا، با اعمال معادلات تعادل استاتیکی برای سایر مفاصل خرپای پیچیده، به عضو مورد نظر که در ابتدا نیروی آن مقدار پارامتر X فرض شده بود بر می‌گردیم که در این صورت تنها مجهول معادلات تعادل پارامتر X خواهد بود که با حل و بدست آوردن آن، نیروی عضوی که در ابتدا X در نظر گرفته شده بود بدست آمده و متعاقباً نیروی سایر اعضای خرپا بدست می‌آید.

۳- ویژگی روش تحلیل جدید

در این روش جدید، با توجه به اینکه خرپای پیچیده فقط یک بار تحلیل می‌گردد، محاسبه نیروی اعضای آن خیلی سریع‌تر و دقیق‌تر و البته راحت‌تر انجام می‌گیرد و همچنین به دلیل آنکه هر مفصل براساس نیروی اعضای متصل و نیروهای خارجی وارد بر آن به طور جداگانه بررسی و تحلیل می‌گردد، بررسی مجدد و مجزای محاسبات در هر مفصل برای مخاطب امکان‌پذیر می‌باشد. بنابراین نه تنها محاسبات کوتاه‌تر شده و احتمال بروز خطای محاسباتی حداقل می‌گردد، بلکه در هر مفصل محاسبات مستقلاً کنترل و بررسی می‌گردد تا از بروز و گسترش خطای محاسباتی به سایر اعضا و مفصل‌ها اجتناب گردد. همچنین این روش جدید، توانایی تحلیل و محاسبه نیروی اعضای انواع خرپای پیچیده نامعین و قاب‌های ساده مفصلی با مهاربند همگرا را، نیز دارد.

۴- عمل کرد روش جدید در تحلیل انواع خرپاهای مبهم

در روش جدید ارائه شده، نیروی اعضای انواع خرپاهای مبهم با هر تعداد عضو در هر مفصل به کمک ایده ریاضی تحلیلی ارائه شده در این روش به سادگی قابل محاسبه می‌باشند. ایده و روش تئوری جدید که در این مقاله ارائه می‌گردد برای حل تمامی خرپاهای پیچیده معین و نامعین و قاب‌های ساده با مهاربند همگرا قابل تعمیم می‌باشد. مراحل تحلیل در روش جدید عبارتند از:

۱- ابتدا با اعمال معادلات تعادل برای کل خرپا و یا قاب، نیروهای عکس‌العمل تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم.

۲- با انتخاب یک عضو (برای پیش فرض عضو متصل به مفصل مجاور تکیه گاه) نیروی آن عضو را معلوم فرض نموده و به آن مقدار پارامتر X اختصاص می‌دهیم.

۳- برای سادگی و راحتی محاسبات، بصورت پیش فرض نیروی تمامی اعضای خرپا و قاب را ابتدا بصورت کششی فرض می‌شود، پس از تحلیل خرپا و محاسبه پارامتر X ، با جایگذاری مقدار X در معادلات، نیروی هر عضو اگر مثبت بدست آمد با فرض اولیه مطابقت داشته و کششی می باشد و اگر منفی بدست آمد نیروی عضو فشاری خواهد بود.

۴- نیروی سایر اعضا در هر مفصل را به کمک معادلات تعادل استاتیکی بر حسب پارامتر X را بدست می‌آوریم. یعنی پس از محاسبه نیروی سایر اعضای مجاور عضو انتخابی X در اولین مفصل (به طور پیش فرض تکیه گاه)، معادلات تعادل را برای مفصل های مجاور نوشته و نیروی اعضای متصل به هریک از مفاصل را بر حسب پارامتر X به ترتیب بدست می‌آوریم.

۵- پس از محاسبه نیروی همه اعضا در هر مفصل بر حسب پارامتر X ، تنها مجهول معادلات تعادل در مفاصل همان پارامتر X می‌باشد، یعنی یک معادله یک مجهولی خواهیم داشت که از حل آن مقدار پارامتر X ، در نتیجه نیروی همه اعضای خرپا پیچیده و یا قاب مفصلی با مهاربند همگرا بدست می‌آید.

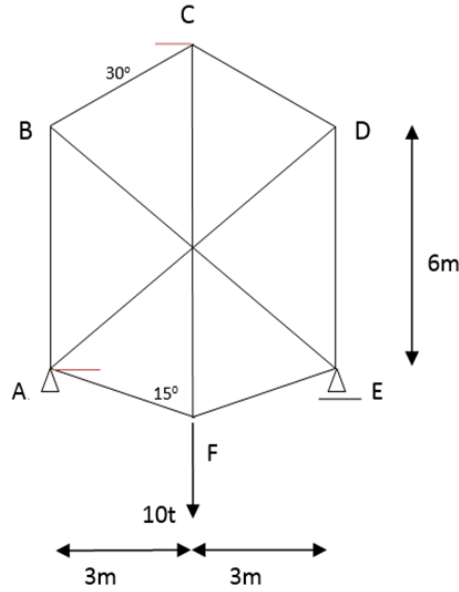
برای درک بهتر مخاطبین، مراحل گام به گام روش جدید ارائه شده در این مقاله، بصورت الگوریتم شکل ۲ خلاصه می‌گردد:



شکل ۲- روند انجام حل در روش پیشنهادی.

۵- نمونه عددی ۱

به عنوان اولین نمونه عددی، خرپای پیچیده در شکل شماره ۳ را در نظر بگیرید، این خرپا در اکثر کتب تحلیل سازه و مراکز علمی و دانشگاهی در سراسر دنیا ارائه و با روش تحلیلی هنبرگ (یا کار مجازی) بررسی و آموزش داده شده‌اند، به کمک روش جدید ارائه شده در این مقاله مورد تحلیل قرار گرفته و دقت و سرعت این روش جدید در محاسبه نیروی هریک از اعضای آن نشان داده می‌شود. این خرپا یک خرپای معین استاتیکی و پایدار بوده که تمام مفاصل آن دارای سه عضو می‌باشد، از این رو نیروهای اعضای آن به کمک روابط معادلات تعادل به تنهایی قابل محاسبه نمی‌باشد. برای حل ابتدا با اعمال معادلات تعادل برای این خرپا واکنش‌های تکیه‌گاهی آن را بدست می‌آوریم که با توجه به تقارن خرپای مذکور خواهیم داشت:

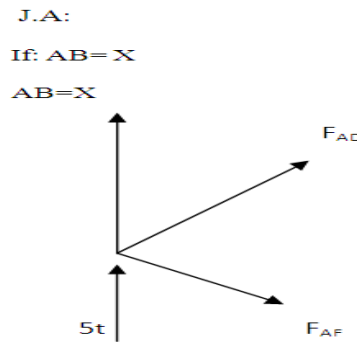


شکل ۳- خرپای پیچیده نمونه عددی ۱.

$$A_y + E_y = 10 \quad (1)$$

$$A_y = E_y = 5 \text{ ton} \quad (2)$$

حال عضو AB به دلخواه انتخاب شده و مقدار نیروی آنرا برابر X فرض می‌نمائیم (شکل شماره ۴). با این فرض از مفصل A اقدام به تحلیل و محاسبه نیروی سایر اعضای متصل به این مفصل به کمک روابط تعادل استاتیکی می‌نمائیم، برای راحتی به طور پیش فرض نیروی همه اعضا بصورت کششی در نظر گرفته می‌شود:



شکل ۴- نمودار جسم آزاد مفصل A.

$$\sum F_x = 0 \quad (3)$$

$$FAD (\cos 45) + FAF (\cos 15) = 0 \quad (4)$$

$$0.7071FAD + 0.97FAF = 0 \quad (5)$$

$$FAD = -1.366FAF \quad (6)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (7)$$

$$X + FAD (\sin 45) - FAF (\sin 15) + 5 = 0 \quad (8)$$

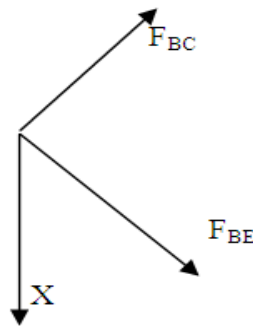
$$X + 0.7071(-1.366FAF) - 0.2588FAF + 5 = 0 \quad (9)$$

$$X - 1.2247FAF + 5 = 0 \quad (10)$$

$$FAF = (X + 5) / 1.2247 \quad (11)$$

پس از محاسبه نیروی اعضای متصل به مفصل A بر حسب پارامتر فرضی X، اقدام به محاسبه نیروی اعضای متصل به مفصل مجاور (به طور پیش فرض در جهت عقربه‌های ساعت) در این مثال مفصل B می‌نمائیم (شکل شماره ۵). عضو AB در این گره با گره A مشترک بوده و مقدار نیروی آن همان مقدار X خواهد بود و مشابه گره قبل نیروی همه اعضای متصل به مفصل را کثشی فرض نموده و با اعمال معادلات تعادل استاتیکی نیروی سایر اعضای این گره بر حسب پارامتر X محاسبه می‌نمائیم:

J.B:



شکل ۵- نمودار جسم آزاد مفصل B.

با اعمال معادلات تعادل استاتیکی برای این مفصل خواهیم داشت:

$$\sum FX = 0 \quad (12)$$

$$FBC(\cos 30) + FBE (\cos 45) = 0 \quad (13)$$

$$FBE = -1.2247FBC \quad (14)$$

$$\sum Fy = 0 \quad (15)$$

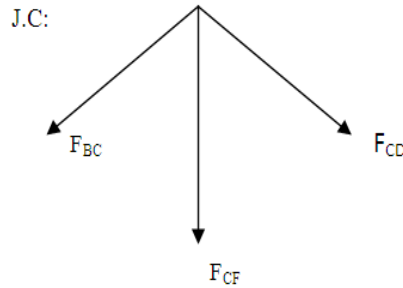
$$FBC (\sin 30) - X - FBE (\sin 45) = 0 \quad (16)$$

$$0.5FBC - X - 0.7071(-1.2247FBC) = 0 \quad (17)$$

$$1.366FBC - X = 0 \quad (18)$$

$$FBC = X / 1.366 \quad (19)$$

پس از محاسبه نیروی اعضای متصل به مفصل B بر حسب پارامتر X در معادله ۱۹، نیروی اعضای مفصل مجاور یعنی مفصل C (شکل شماره ۶) را مطابق روش قبل بدست می آوریم:



شکل ۶- نمودار جسم آزاد مفصل C.

$$\sum F_x = 0 \quad (20)$$

$$-F_{BC} (\cos 30) + F_{CD} (\cos 30) = 0 \quad (21)$$

$$F_{BC} = F_{CD} \quad (22)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (23)$$

$$-F_{CF} - F_{BC} \sin 30 - F_{CD} (\sin 30) = 0 \quad (24)$$

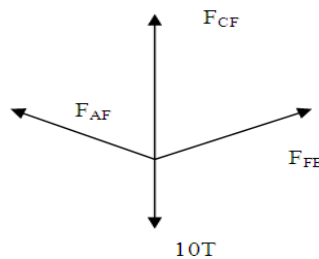
با استفاده از معادله ۱۹ خواهیم داشت:

$$F_{BC} = X / 1.366 \quad (19)$$

$$F_{CF} = -0.7322X \quad (25)$$

همانگونه که در شکل شماره ۷ مشاهده می شود عضو CF بین مفصل C و مفصل F که مجاور اولین گره تحلیلی (مفصل A) می باشد مشترک بوده و با محاسبه نیروی عضو CF بر حسب پارامتر X بدست آمده، بنابراین بانوشتن معادلات تعادل مفصل F (شکل شماره ۶) تنها مجهول نیروی عضو AF که عضو مشترک با مفصل A می باشد همان پارامتر X خواهد بود و که یک معادله تک مجهولی بر حسب پارامتر X می باشد.

J.F:



شکل ۷- نمودار جسم آزاد مفصل F.

$$\sum FX = 0 \quad (26)$$

$$-FAF(\cos 15) + FEF(\cos 15) = 0 \quad (27)$$

$$FAF = FEF \quad (28)$$

$$\sum Fy = 0 \quad (29)$$

$$FCF + FAF(\sin 15) + FFE(\sin 15) - 10 = 0 \quad (30)$$

با جایگذاری معادله ۱۱ و معادله ۲۵ در معادله ۳۰ خواهیم داشت:

$$-0.7322X + 0.2588(X + 5) / 1.2247 + 0.2588(X + 5) / 1.2247 - 10 = 0 \quad (31)$$

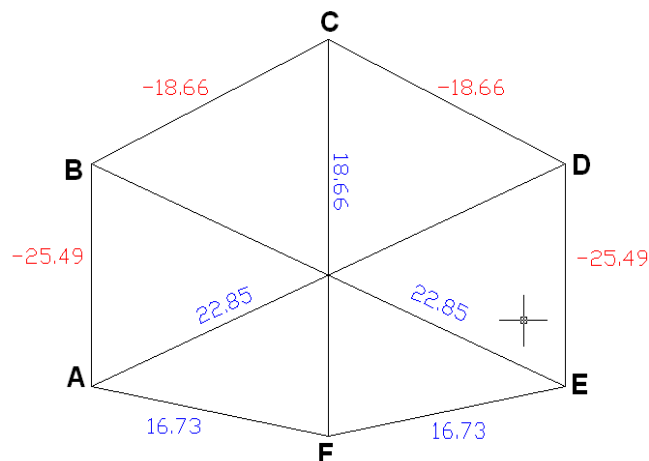
$$X = -25.49T \quad (32)$$

با بدست آمدن پارامتر X از معادله ۳۲، نیروی عضو AB و در نتیجه با جایگذاری مقدار X در معادلات فوق، نیروی تمام اعضا مطابق جدول شماره ۱ بدست خواهد آمد:

جدول ۱- نیروی اعضای خرپای مثال ۱.

عضو خرپا	مقدار نیرو (Ton)	نیروی عضو در نرم افزار (ton)
F_{AF}	۱۶/۳۷	۱۶/۳۷
F_{FE}	۱۶/۳۷	۱۶/۳۷
F_{CF}	۱۸/۶۶	۱۸/۶۶
F_{BC}	-۱۸/۶۶	-۱۸/۶۶
F_{CD}	-۱۸/۶۶	-۱۸/۶۶
F_{BE}	۲۲/۸۵	۲۲/۸۵
F_{AD}	۲۲/۸۵	۲۲/۸۵
F_{AB}	-۲۵/۴۹	-۲۵/۴۹
F_{DE}	-۲۵/۴۹	-۲۵/۴۹

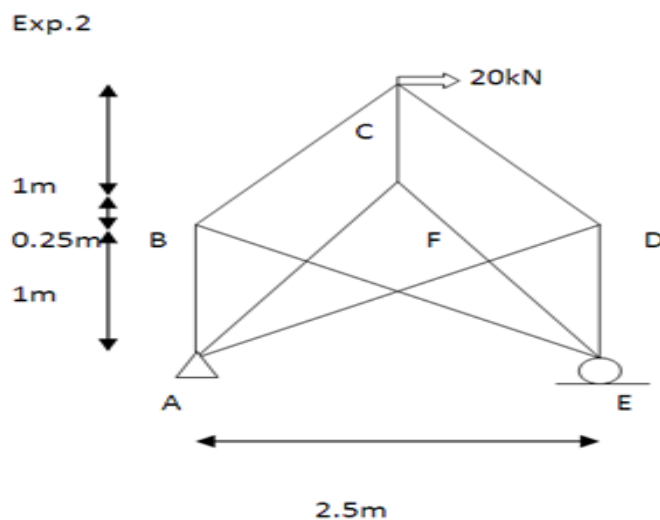
جهت کنترل و صحت سنجی، همانگونه که در جدول شماره ۱ مشاهده می شود نتایج بدست آمده در جدول شماره ۱ با مدل بارگذاری شده در نرم افزار SAP2000 (شکل شماره ۸) مطابقت دارد:



شکل ۸- مدل بارگذاری شده مثال ۱ در نرم افزار جهت صحت‌سنجی.

۶- نمونه عددی ۲

خرپای مبهم شکل شماره ۹ را در نظر بگیرید این خرپا ۹ عضو و شش گره دارد و یک خرپای معین استاتیکی و پایدار بوده که به هر گره سه عضو غیر صفر نیرو متصل است.



شکل ۹- خرپای مبهم مثال ۲.

در گام نخست، با اعمال معادله تعادل به کل خرپا، عکس‌العمل‌های تکیه گاهی محاسبه می‌شوند:

$$\sum FX = 0 \quad (33)$$

$$AX = -20KN \quad (34)$$

$$\sum FY = 0 \quad (35)$$

$$Ay + By = 0 \quad (36)$$

$$\sum ME = 0 \quad (37)$$

$$2.5Ay + 2.25(20) = 0 \quad (38)$$

$$Ay = -18KN \quad (39)$$

$$Ey = 18KN \quad (40)$$

سپس با استفاده از فرض اساسی روش جدید ارائه شده، یک عضو از خریای فوق را به دلخواه انتخاب کرده و مقدار نیروی آن را بصورت کششی و با مقدار X فرض می‌نمائیم. در این مثال عضو AB انتخاب و مقدار نیروی آن X بصورت کششی فرض می‌گردد (شکل شماره ۱۰). اکنون می‌توان معادلات تعادل استاتیکی را بر مفصل متصل به عضو AB یعنی گره A اعمال نمود و نیروی سایر اعضای آنرا بر حسب پارامتر فرضی X بدست آورد:

$$\sum FX = 0 \quad (41)$$

$$FAD \cos(21.8) + FAF \cos(45) - 20 = 0 \quad (42)$$

$$0.9285FAD + 0.707FAF = 20 \quad (43)$$

$$FAD = 21.54 - 0.762FAF \quad (44)$$

$$\sum Fy = 0 \quad (45)$$

$$X + FAD\sin(21.8) + FAF\sin(45) - 18 = 0 \quad (46)$$

$$X + 0.3714FAD + 0.707FAF = 18 \quad (47)$$

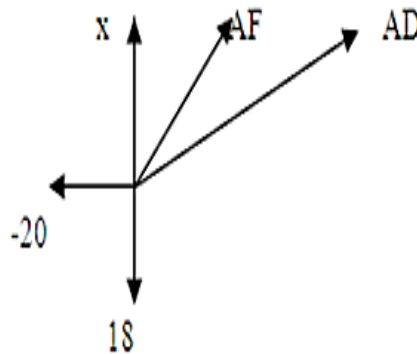
$$X + 0.3714(21.54 - 0.762FAF) + 0.707FAF = 18 \quad (48)$$

$$X + 0 + 0.424FAF = 18 \quad (49)$$

$$FAF = 23.58 - 2.36X \quad (50)$$

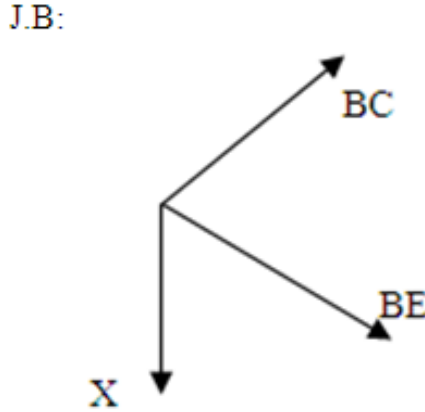
$$FAD = 3.57 + 1.8X \quad (51)$$

J.A:



شکل ۱۰- نمودار جسم آزاد مفصل A.

با محاسبه نیروی اعضای متصل به مفصل A برحسب پارامتر X، معادلات تعادل استاتیکی را برای مفصل بعدی (به طور پیش فرض در جهت عقربه‌های ساعت) یعنی مفصل B اعمال می‌نمائیم (شکل شماره ۱۱). عضو مشترک بین مفصل A و مفصل B عضو AB که مقدار نیروی آن در ابتدا X بصورت کششی فرض شده است می‌باشد. در این گره نیروی سایر اعضای متصل به آن برحسب پارامتر X بدست می‌آید:



شکل ۱۱- نمودار جسم آزاد مفصل B.

$$\sum F_x = 0 \quad (52)$$

$$FBE\cos(21.8) + FBC\cos(45) = 0 \quad (53)$$

$$0.9285FBE + 0.707FBC = 0 \quad (54)$$

$$FBE = -0.762FBC \quad (55)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (56)$$

$$-X - FBE\sin(21.8) + FBC\sin(45) = 0 \quad (57)$$

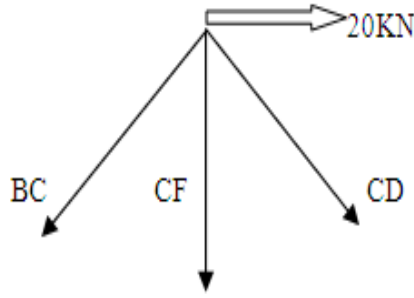
$$-X - 0.3714(-0.762FBC) + 0.707FBC = 0 \quad (58)$$

$$-X + FBC = 0 \quad (59)$$

$$X = FBC \quad (60)$$

در گام بعدی، معادلات تعادل را برای مفصل مجاور (مفصل B) در این نمونه یعنی مفصل C نوشته (شکل شماره ۱۲) و نیروی اعضای متصل به آن را برحسب پارامتر X بدست می‌آوریم، به طور پیش فرض همانند گام‌های قبل، نیروی همه اعضا در ابتدا کششی فرض می‌شود:

J.C:



شکل ۱۲: نمودار جسم آزاد مفصل C

$$\sum FX = 0 \quad (۶۱)$$

$$-0.707FBC + 0.707FCD + 20 = 0 \quad (۶۲)$$

$$-0.707(X) + 0.707FCD + 20 = 0 \quad (۶۳)$$

$$-0.707X + 0.707FCD + 20 = 0 \quad (۶۴)$$

$$FCD = -28.288 + X \quad (۶۵)$$

$$\sum FY = 0 \quad (۶۶)$$

$$-0.707FBC - 0.707FCD - FCF = 0 \quad (۶۷)$$

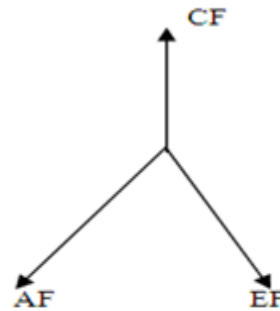
$$-0.707(X) - 0.707(-28.288 + X) - FCF = 0 \quad (۶۸)$$

$$-20 - 1.414X = FCF \quad (۶۹)$$

$$FCF = 20 - 1.414X \quad (۷۰)$$

اکنون با داشتن نیروی عضو CF برحسب پارامتر X، می توان برای کوتاه نمودن محاسبات، مستقیماً معادلات تعادل را برای مفصل F (شکل شماره ۱۳) که عضو مشترک با اولین مفصل تحلیل شده (مفصل A) دارد نوشته و نیروی عضو AF را برحسب پارامتر X بدست می آوریم، در این معادله تعادل تنها مجهول رابطه همان پارامتر X خواهد بود:

J.F:



شکل ۱۳- نمودار جسم آزاد مفصل F.

$$\sum FX = 0 \quad (۷۱)$$

$$-0.707FAF + 0.707FEF = 0 \quad (۷۲)$$

$$FAF = FEF \quad (۷۳)$$

$$\sum FY = 0 \quad (۷۴)$$

$$FCF - 0.707FAF - 0.707FEF = 0 \quad (۷۵)$$

$$(20 - 1.414X) - 0.707(23.58 - 2.36X) - 0.707(23.58 - 2.36X) = 0 \quad (۷۶)$$

$$20 - 1.414X - 16.671 + 1.668X - 16.671 + 1.668X \quad (۷۷)$$

$$1.9X - 13.34 = 0 \quad (۷۸)$$

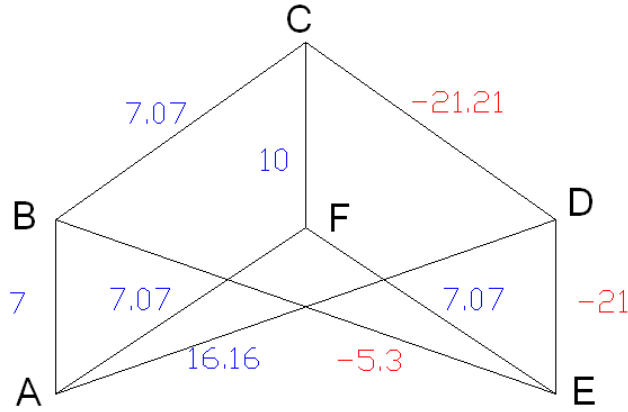
$$X = 7KN \quad (۷۹)$$

با جایگذاری مقدار بدست آمده برای پارامتر X از معادله شماره ۷۸ در معادلات فوق، نیروی همه اعضای خرپا مطابق جدول شماره ۲ بدست می‌آید.

جهت کنترل و صحت سنجی، مدل بارگذاری شده خرپای پیچیده نمونه عددی ۲، در شکل شماره ۱۴ نشان داده شده است:

جدول ۲- نیروی اعضای خرپای مثال ۲.

عضو خرپا	مقدار نیرو (KN)	مقدار نیرو در نرم افزار (KN)
F_{AB}	۷	۷
F_{BC}	۷/۰۷	۷/۰۷
F_{CF}	۱۰	۱۰
F_{AF}	۷/۰۷	۷/۰۷
F_{EF}	۷/۰۷	۷/۰۷
F_{CD}	-۲۱/۲۱	-۲۱/۲۱
F_{DE}	-۲۱	-۲۱
F_{AD}	۱۶/۱۶	۱۶/۱۶
F_{BE}	-۵/۳	-۵/۳

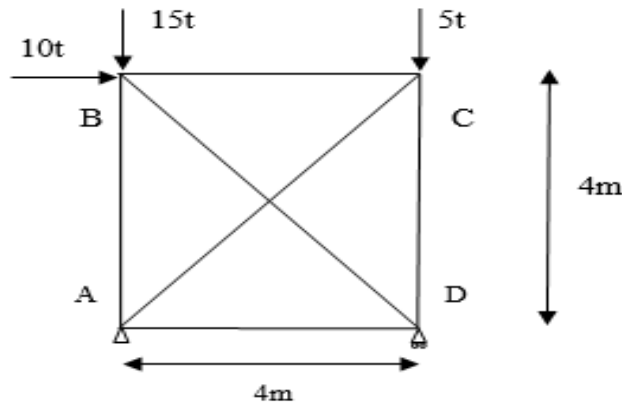


شکل ۱۴- مدل بارگذاری شده مثال ۲ در نرم افزار جهت صحت سنجی.

همانگونه که در دو نمونه عددی فوق مشاهده گردید، برخلاف سایر روش‌های طولانی و پیچیده که سابقاً مورد استفاده قرار می‌گرفت، در این روش جدید نیاز به تحلیل و نوشتن معادلات تعادل استاتیکی برای همه اعضای خرپاهای پیچیده نمی‌باشد و با نوشتن معادلات تعادل حتی برای نیمی از خرپا، عملاً خرپا پیچیده تحلیل شده و بدست آوردن سایر نیروی اعضای آن به سادگی امکان‌پذیر می‌گردد.

۷- نمونه عددی ۳

برای بیان بهتر قدرت تحلیل روش جدید ارائه شده، قاب مفصلی با مهاربندی‌های همگرا ضربدری شکل ۱۵ را در نظر بگیرید، برای تحلیل و محاسبه نیروی اعضای این قاب، دیگر نیازی به روش‌های طولانی و پیچیده کلاسیک نمی‌باشد و مشابه روش ارائه شده در نمونه‌های قبل، به سادگی می‌توان نیروی اعضای این قاب را بدست آورد:



شکل ۱۵- قاب مفصلی با مهاربند نمونه عددی ۳.

ابتدا، با نوشتن معادلات تعادل برای قاب، نیروی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را بدست می‌آوریم:

$$\sum FX = 0 \quad (۸۰)$$

$$AX = -10 \quad (۸۱)$$

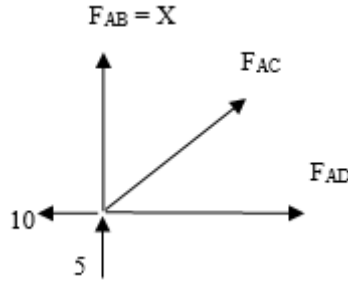
$$\sum FY = 0 \quad (۸۲)$$

$$Ay + Dy = 20 \quad (۸۳)$$

$$Ay = 5t \quad (۸۴)$$

$$Dy = 15t \quad (۸۵)$$

یک عضو به دلخواه انتخاب و مقدار نیروی آن پارامتر X فرض می‌شود، در این نمونه عددی عضو AB انتخاب می‌گردد. سپس با نوشتن معادلات تعادل برای اولین مفصل (مفصل A در شکل ۱۶) نیروی اعضای متصل به این مفصل را بر حسب پارامتر X بدست می‌آوریم (برای سادگی ابتدا نیروی همه اعضا کششی فرض می‌شود) خواهیم داشت:



شکل ۱۶- نمودار جسم آزاد مفصل A.

$$\sum FY = 0 \quad (۸۶)$$

$$FAB + FAC \sin(45) + 5 = 0 \quad (۸۷)$$

$$X + 0.707FAC + 5 = 0 \quad (۸۸)$$

$$FAC = (-X - 5) / 0.707 \quad (۸۹)$$

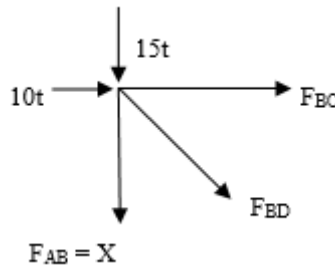
$$\sum FX = 0 \quad (۹۰)$$

$$FAD + FAC \cos(45) - 10 = 0 \quad (۹۱)$$

$$FAD + (-X - 5) - 10 = 0 \quad (۹۲)$$

$$FAD = X + 15 \quad (۹۳)$$

در گام بعدی، معادلات تعادل را برای مفصل مجاور (مفصل B شکل ۱۷) را می‌نویسیم:



شکل ۱۷- نمودار جسم آزاد مفصل B.

$$\sum FY = 0 \quad (۹۴)$$

$$-FAB - FBD \sin(45) - 15 = 0 \quad (95)$$

$$-X - 0.707FBD - 15 = 0 \quad (96)$$

$$FBD = (-X - 15) / 0.707 \quad (97)$$

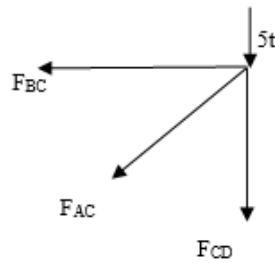
$$\sum FX = 0 \quad (98)$$

$$FBC + FBD \cos(45) + 10 = 0 \quad (99)$$

$$FBC - X - 15 + 10 = 0 \quad (100)$$

$$FBC = X + 5 \quad (101)$$

در ادامه، معادلات تعادل برای مفصل بعدی (مفصل C شکل ۱۸) برای بدست آوردن نیروی آخرین عضو باقیمانده از این قاب مهاربندی شده را می نویسیم:



شکل ۱۸- نمودار جسم آزاد مفصل C.

$$\sum FY = 0 \quad (102)$$

$$-FCD - FAC \sin(45) - 5 = 0 \quad (103)$$

$$-FCD - (-X - 5) - 5 = 0 \quad (104)$$

$$-FCD + X + 5 - 5 = 0 \quad (105)$$

$$FCD = X \quad (106)$$

اکنون که نیروی همه اعضای این قاب مفصلی با مهاربندهای ضربدری بر حسب پارامتر X بدست آمدند، از قاعده ارتباط بین تغییر طول اعضای پیرامونی با تغییر طول اعضای مهاربند (مورب) در قابهای مفصلی با مهاربندهای همگرا که در این مقاله برای اولین بار ارائه شده، استفاده می گردد، بر اساس این قاعده، مجموع تغییر طول محوری همه اعضای پیرامونی قابهای ساده مفصلی با مهاربندی همگرا با مجموع تغییر طول محوری اعضای مورب (مهاربندها) برابر می باشد. بنابراین، با جایگذاری نیروی همه اعضای قاب فوق بر حسب پارامتر X، تغییر طول محوری اعضا محاسبه می شود:

$$\sum(\Delta AB + \Delta BC + \Delta CD + \Delta AD) = \sum(\Delta AC + \Delta BD) \quad (107)$$

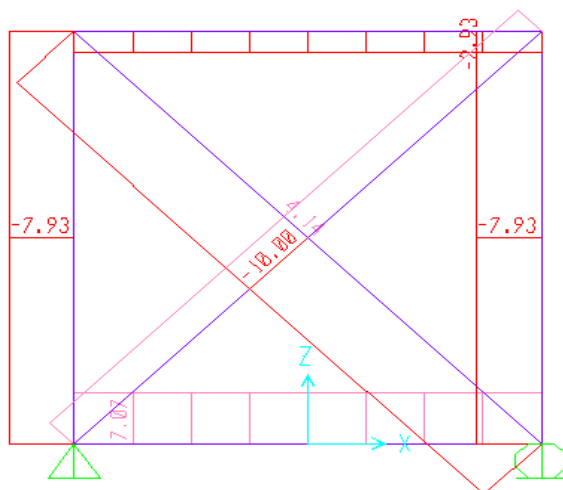
$$\sum((4X)/AE + (4(X+5))/AE + (4X)/AE + (4(X+15))/AE) = \sum((-1.414X - 7.07)(5.65)/AE + (-1.414X - 21.216)(5.65)/AE) \quad (108)$$

$$(16X + 80) / AE = (-2.828X - 28.286)(5.65) / AE \quad (109)$$

$$16X + 80 = -16X - 160 \quad (110)$$

$$X = -7.5 \text{ ton} \quad (111)$$

اکنون با بدست آمدن پارامتر X ، مقدار آن در معادلات تعادل استاتیکی مفاصل در روابط فوق جایگذاری نموده، در نتیجه نیروی همه اعضای این قاب بدست می‌آید. برای صحت‌سنجی مقادیر بدست آمده با جواب حاصل از تحلیل نرم‌افزار SAP2000 در شکل ۱۹ کنترل می‌گردد:



شکل ۱۹- مدل بارگذاری شده نمونه عددی ۳ در نرم افزار جهت کنترل و صحت‌سنجی.

برای مقایسه جواب‌های بدست آمده با جواب‌های حاصل از نرم‌افزار SAP2000 جدول شماره ۳ ارائه می‌گردد:

جدول ۳- نیروی اعضای قاب مفصلی نمونه عددی ۳.

اعضا	نیروی اعضا در روش جدید (ton)	نیروی اعضا در نرم‌افزار (ton)
F_{AB}	-۷/۵	-۷/۹۳
F_{BC}	-۲/۵	-۲/۹۳
F_{CD}	-۷/۵	-۷/۹۳
F_{AD}	+۷/۵	+۷/۰۷
F_{BD}	-۱۰/۵	-۱۰
F_{AD}	+۳/۶۵	+۴/۱۴

اختلاف حدود ۰/۵ تن در جدول فوق به دلیل گرد کردن مقادیر اعشاری در معادلات فوق و یا مدلسازی و نوع پروفیل‌های در نرم‌افزار SAP2000 می‌باشد که قابل صرف‌نظر کردن است.

در بعضی از موارد تحلیل خرپا کار سخت و پیچیده می‌باشد و با روش‌هایی که سابق از این در تحلیل سازه‌ها بیان شده، تحلیل و بدست آوردن نیروی اعضای خرپا به راحتی امکان‌پذیر نمی‌باشد. در این مقاله با ارائه یک روش تئوری ریاضی و تحلیلی، با ذکر نمونه‌های عددی، به بررسی و تحلیل خرپاهای مبهم و پیچیده و قاب‌های مفصلی با مهاربند همگرا به گونه‌ای متفاوت و

جدید پرداخته شده است. این روش جدید یک روند حل ساده و کاربردی برای اینگونه سازه‌های پر کاربرد بوده و قابلیت این را دارد که انواع خرپاهای پیچیده و قاب‌های مفصلی با مهاربند همگرا را تحلیل نماید و قابل تعمیم به انواع سازه‌های مفصلی نامعین نیز می‌باشد. در نتیجه این روش قدرتمند، در زمان کوتاه و با محاسبات دقیق‌تر می‌تواند انواع خرپای پیچیده را تحلیل نماید.

۸- نتیجه گیری

۱- همان گونه که در نمونه‌های عددی شماره ۱ و ۲ به روشنی نشان داده شد، برای حل خرپاهای پیچیده دیگر نیازی به دو و یا چند بار تحلیل خرپا مطابق آنچه در روش‌های پیشین (مانند روش هنبرگ و یا روش کار مجازی) ارائه شده، نبوده و استفاده کنندگان از این روش جدید با انتخاب یک عضو دلخواه از خرپای پیچیده و اختصاص پارامتر X به آن، قادر خواهند بود تمامی نیروهای اعضای خرپای پیچیده را با یک بار تحلیل و کمترین محاسبات در کوتاه‌ترین زمان بدست آورند. همچنین در نمونه عددی شماره ۳ مشاهده گردید با همان روش تحلیلی جدید ارائه شده در تحلیل خرپاهای پیچیده، می‌توان قاب‌های مفصلی ساده با مهاربند همگرا را با کوتاه‌ترین محاسبات تحلیل نموده و نیروی تمامی اعضای این قابها را با هر تعداد دهانه بدست آورد. ایده ارتباط میان تغییر طول محوری اعضای پیرامونی قاب‌های ساده با مهاربند همگرا با تغییر طول محوری اعضای مورب (مهاربندها) این قاب‌ها برای اولین بار است که در این مقاله مطرح می‌گردد و یک روش منحصر به فرد با توانایی تحلیل انواع این نمونه از سازه‌های قابندی شده می‌باشد.

۲- روش تحلیلی جدید بسیار دقیق بوده و مقدار بدست آمده برای هر عضو بدون خطا می‌باشد به طوری که اگر جواب بدست آمده از دقت کافی برخوردار نبوده و یا دقیق نباشد تعادل کلی مفصل و یا مفاصل مجاور برقرار نمی‌گردد. در این روش ساده و سریع، سعی بر آن شده است تا جای ممکن از قواعد و شروط ویژه و خاصی برای تحلیل خرپا استفاده نگردد و تنها پیش فرض برای تحلیل خرپای پیچیده یا قاب ساه مفصلی با مهاربند همگرا، انتخاب یک عضو دلخواه از سازه و منسوب نمودن مقدار فرضی X به آن می‌باشد. بنابراین در این روش جدید برای تحلیل خرپای مبهم یا قاب مهاربندی شده، از مفروضات گنج‌کننده و محاسبات طولانی استفاده نشده و بلعکس سعی بر آن شده که از روش‌های ساده که برای تحلیل سایر خرپاها وجود داشت، استفاده گردد، که اهمیت و مزیت این روش را بیشتر نشان می‌دهد. از طرفی رابطه میان تغییر طول اعضای قاب‌های مهاربندی شده از ویژگی‌ها و ابزار منحصر به فرد ارائه شده در این روش جدید می‌باشد که با تعمیم و گسترش آن به سایر سازه‌های خرپایی، انقلابی در علم تحلیل سازه بوجود می‌آید.

۳- روش نوین ارائه شده در این مقاله، یک ایده خلاقانه تئوری ریاضی و تحلیلی سریع و کارآمد و یک ابزار قوی برای تحلیل و محاسبه نیروی اعضای خرپاهای مبهم و پیچیده معین و نامعین داخلی و می‌باشد که روش‌های سابق ارائه شده در کتب و مقالات گذشته، این توانایی را نداشته و دارای محدودیت خصوصاً در مورد خرپاهای پیچیده نامعین می‌باشند. همچنین در این روش جدید دیگر نیازی به انجام چندین باره تحلیل خرپا و محاسبات طولانی و وقت‌گیر نمی‌باشد و محاسبات کوتاه، دقیق و مستقل از یکدیگر انجام می‌گردد. از طرفی با تعمیم این روش به قاب‌های ساده با مهاربندهای همگرا و نوشتن رابطه تغییر طول محوری میان اعضای قاب، گامی بلند در پیشرفت روش‌های نوین تحلیل سازه‌های قاب با مهاربند همگرا صورت گرفته است که در همه دانشگاه‌ها و مراکز علمی و پژوهشی سراسر دنیا قابل ارائه می‌باشد.

۴- در پایان شایان ذکر است طی سال‌های گذشته، علی‌رغم کاربرد و اهمیت فراوان سازه‌های خرپایی پیچیده، محققین و پژوهشگران در زمینه تئوری و روش جدید تحلیل اینگونه سازه‌ها، نوآوری و یا تولید محتوای متفاوت از روش تحلیلی قبلی، ارائه ننموده‌اند و یا صرفاً روش‌های تحلیلی کلاسیک گذشته را توسعه داده‌اند، در حالی که این مقاله، یک شیوه و روش

محاسباتی نوین و مبتکرانه را ارائه می‌دهد که پیش این، در کتب و مقالات علمی مربوط به تحلیل سازه مطرح نگردیده بود و بسیار قدرتمندتر و دقیق‌تر و البته ساده و کاربردی‌تر از روش‌های پیچیده که سابق بر این ارائه شده، می‌باشد. امید است با همت و کوشش مخاطبان و محققین رشته سازه، شاهد بست و گسترش این روش جدید و توانمند در تحلیل انواع سازه‌های خرپایی و قاب‌های مهاربندی شده باشیم.

سپاسگزاری

در پایان از استاد گرامی جناب آقای دکتر رضا اسماعیل آبادی استادیار دانشگاه آزاد واحد رودهن و جناب آقای دکتر علیرضا فیوض استادیار دانشگاه خلیج فارس بوشهر که صمیمانه در تهیه و تکمیل این مقاله بنده را یاری نمودند و همچنین از هم‌فکری تمام اعضای کمیته علمی انجمن مهندسی سازه ایران کمال سپاسگزاری را دارد.

فهرست علائم

F: نیروی عضو خرپا

L: گره (مفصل)

R: عکس‌العمل تکیه گاهی

Σ: مجموع نیروها

مراجع

- [1] Norris and Wilbur and Utka. (1990). *Elementary Structural Analysis*. Mc Graw Hill, Page(3)
- [2] Yuan Yu Hsieh. (1970) *Elementary Theory of Structures*. Prentice-Hall, Page(3).
- [3] J. Sterling Kinney. (1957). *Indeterminate Structural Analysis*. Addison Hill, Page(3)
- [4] Timoshenko and Young. (1945). *Theory of Structural*. Mc Graw Hill, Page(3)
- [5] McKenzie W.M.C. (2006). *Examples in Structural Analysis. Published in the Taylor & Francis Elibrary*, 2006. Page(3)
- [6] Ustundag Cenk, (2005), *Analysis of Statically Determinate Trusses. Theory of Structures*. 198 pp, Page(3)
- [7] Kharagpur, (2012). *Energy Methods in Structural Analysis. Version 2 Celit, Kharagpur*, Page(3)
- [8] Saouma Victor E. (2007). *Analysis and Design*. Dept. of Civil Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, Co 80309-0428. 142 pp, Page(3)
- [9] Kalani Mohan, (2012). *Basic concepts and Conventional methods of Structural analysis*. Department of civil engineering Indian institute of technology (bombay), Powai, Mumbai – 400 076, India. 362 pp, Page(3)
- [10] Akhavan Mohammad Reza, Tahouni Shapour. (1997). *Structural Analysis*. Amirkabir University of Technology, Page(3)
- [11] Fallah Nasr. (2012). *Structural Analysis*. Gilan University, Page(3)
- [12] Kassimali Aslam. (2015). *Structural Analysis*. Southern Illinois University-Carbondil, Page(3)
- [13] Pons Poblet, J. M. (2019). The vierendeel truss: past and present of an innovative typology. *Arquitetura revista*, 15(1), 193-211.
- [14] Sun, S., Ma, Y., Wei, D., Li, M., & Liang, L. (2022). Performance Evaluation of Truss Structure via Cloud Matter Element Fusion. *Journal of Performance of Constructed Facilities*, 36(2), 04022007.

- [15] Nie, R., He, B., Hodges, D. H., & Ma, X. (2019). Integrated form finding method for mesh reflector antennas considering the flexible truss and hinges. *Aerospace Science and Technology*, 84, 926-937.
- [16] Schmit, L.A., Miura, H., A new structural analysis/synthesis capability-ACCESS 1, *AIAA Journal*, 14(5), 1976, 661-671.
- [17] Rizzi, P., Optimization of multi-constrained structures based on optimality criteria, Proc. of the 17th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, King of Prussia, PA, USA, 1976.
- [18] Ringertz, U.T., On topology optimization of trusses, *Engineering Optimization*, 9(3), 1985, 209-218.
- [19] Hassan, M.A., Nasir, H., Saeed, J. (2019). Experimental Investigation of high strength precast reinforced concrete walls used (Vierendeel truss form). *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 584(1):012008. <https://doi.org/10.1088/1757-899X/584/1/012008>
- [20] Korol, R.M., El-Zanaty, M., Brady, F.J. (1977). Unequal width connections of square hollow sections in Vierendeel trusses. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 4(2): 190-201. <https://doi.org/10.1139/177-024>
- [21] Shehata, A.A., Korol, R.M., Mirza, F.A. (1987). Joint flexibility effects on rectangular hollow section Vierendeel Trusses. *Journal of Structural Mechanics*, 15(1): 89-107. <https://doi.org/10.1080/08905458708905110>
- [22] Basha, H.S., Goel, S.C. (1995). Special truss moment frames with Vierendeel middle panel. *Engineering Structures*, 17(5): 352-358. [https://doi.org/10.1016/0141-0296\(95\)00018-3](https://doi.org/10.1016/0141-0296(95)00018-3)
- [23] Huang JuHua, (2014). Determination of internal force of Complex Plan Truss. *Journal of Mechanics and Materials*, [doi.org/ 10.4028/1662-7482/543-547](https://doi.org/10.4028/1662-7482/543-547)